Verwendete Literatur:
"Taschenbuch der Mathematik" ("Bronstein")
S.30, 1.4.2.3 und S.405, 6.1.5.3.3 zur Lösungsfindung für Hilfssatz 2
Programme:
"Zirkel und Lineal" (Z.u.L.) für die Zeichnungen der Aufgabe 3

Zum Syntax: $a \bmod b$ berechnet den Rest, den die Zahl a bei der Division durch b lässt.
$\sum_{i \in \mathbb{M}} i$ bezeichnet die Summe aller Zahlen der Menge $\mathbb{M}$.
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Hilfssatz 1

Der Elferrest der Summe aller Zahlen wird durch einen Spielzug nicht verändert.
Beweis:
Satz 1: Jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ lässt sich eindeutig so darstellen: $n = 11a + b$, mit $a, b \in \mathbb{N}$ und $b < 11$. Dabei ist b der Elferrest und nach Voraussetzung gilt für diesen, dass $n - b$ durch 11 teilbar ist. Daher ist $a = (n - b)/11$.
Satz 2: Die Addition von $11z$, $z \in \mathbb{Z}$ zu einer Zahl $n \in \mathbb{N}$ $(-n \leq 11z)$ ändert den Elferrest der Zahl n nicht. Das sieht man direkt aus *Satz 1*, da b unverändert bleibt.

Sei $\mathbb{M}$ eine endliche Menge natürlicher Zahlen, die paarweise verschieden sind. Sei $\mathbb{T}$ eine Teilmenge von $\mathbb{M}$.
Ein Spielzug im Sinne der Aufgabe besteht darin, die Zahlen der Menge $\mathbb{T}$ aus der der Menge $\mathbb{M}$ zu entfernen und den Elferrest der Summe der Zahlen in $\mathbb{T}$ der Menge $\mathbb{M}$ hinzuzufügen.

Die Summe aller Zahlen der Menge $\mathbb{M}$ ohne $\mathbb{T}$:

$$\sum_{i \in \mathbb{M} \setminus \mathbb{T}} i = \sum_{i \in \mathbb{M}} i - \sum_{i \in \mathbb{T}} i$$

Der Elferrest der Summe aller Zahlen in $\mathbb{T}$ ist $\left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11$ und damit ist die Summe aller Zahlen nach einem Spielzug:

$$\sum_{i \in \mathbb{M}} i - \sum_{i \in \mathbb{T}} i + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11$$

Wendet man nun darauf $\bmod 11$ an:

$$\left(\sum_{i \in \mathbb{M}} i - \sum_{i \in \mathbb{T}} i + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11\right) \bmod 11$$

Satz 1 sagt aus, dass es eine Zahl a gibt, für die gilt:

$$\sum_{i \in \mathbb{T}} i = 11a + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11$$

Damit ergibt sich unter Verwendung von *Satz 2* ($11a \leq \sum_{i \in \mathbb{T}} i \leq \sum_{i \in \mathbb{M}} i$, da $\mathbb{T} \subset \mathbb{M} \subset \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\left(\sum_{i \in \mathbb{M}} i - \sum_{i \in \mathbb{T}} i + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11\right) \bmod 11 \\
= &\left(\sum_{i \in \mathbb{M}} i - \left(11a + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11\right) + \left(\sum_{i \in \mathbb{T}} i\right) \bmod 11\right) \bmod 11 \\
= &\left(\sum_{i \in \mathbb{M}} i - 11a\right) \bmod 11 = \left(\sum_{i \in \mathbb{M}} i\right) \bmod 11
\end{aligned}$$

Das bedeutet, dass der Elferrest der Summe aller Zahlen durch einen Spielzug nicht verändert wurde.

Aufgabe 1

Berechnung einer möglichen Zahl, die neben der 1000 an der Tafel steht:
Wählt man beim ersten Spielzug alle Zahlen zwischen 1 und 2004 ohne die 1000, dann steht neben der 1000 noch die

$$\left(-1000+\sum_{i=1}^{2004} i\right) \bmod 11 = \left(-1000+\frac{2004*2005}{2}\right) \bmod 11 = 2008010 \bmod 11 = 4$$

an der Tafel. (Dabei wurde $\sum_{i=1}^{n} i = n(n+1)/2$ verwendet)

Beweis, dass es keine andere sein kann:
Die 1000 kann kein Elferrest sein, da $1000 \geq 11$ gilt. Wenn sie am Ende noch an der Tafel stehen soll, darf man sie nicht löschen, d.h. man darf sie nie in einem Spielzug verwenden.
Deswegen kann man sich auf die Zahlen zwischen 1 und 2004 ohne die 1000 beschränken.
Nach Voraussetzung werden diese Zahlen durch Spielzüge auf nur eine Zahl reduziert.
In Verbindung mit dem *Hilfssatz 1* folgt daraus, dass der Elferrest der Summe dieser Zahlen gleich dem der Zahl am Ende ist. Das am Anfang immer die gleichen Zahlen verwendet werden, hat damit zur Folge, dass die Zahl am Ende immer den selben Elferrest hat.
Die Zahl am Ende muss ein Elferrest sein, also zwischen 0 und 10 liegen, da man mindestens ein Spielzug braucht um die Anzahl der Zahlen zu reduzieren.
Deswegen kann nur eine bestimmte Zahl neben der 1000 stehen, die unabhängig von den Spielzügen des jeweiligen Spiels ist.

Deswegen kann nur die 4 neben der 1000 stehen.

Aufgabe 2

Seien h_a, h_b und h_c die Höhen auf die entsprechenden Seiten. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man annehmen, dass

$$h_a + h_b = h_c \tag{1}$$

gilt, da man die Seiten (und damit auch die Höhen) beliebig benennen kann.
Die Fläche F eines Dreiecks ist das halbe Produkt der Höhe und der dazugehörenden Seite, also:

$$F = \frac{1}{2}h_a a = \frac{1}{2}h_b b = \frac{1}{2}h_c c \tag{2}$$

Wenn das Dreieck entartet, also wenn $F = 0$ wird, gilt die Behauptung der Aufgabe nicht mehr. Ein Beweis dafür ist auf der nächsten Seite. Im Weiteren kann man annehmen, dass $F \neq 0$ gilt.
Teilt man nun die Gleichung 1 durch F, dann ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& & h_a + h_b = h_c & \qquad |/F \\
& & \Rightarrow \frac{h_a}{F} + \frac{h_b}{F} = \frac{h_c}{F} & \\
& \text{(wegen Gleichung 2)} & \Rightarrow \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = \frac{2}{c} & \qquad | * abc \\
& & \Rightarrow 2bc + 2ac = 2ab & \\
& & \Rightarrow 2ab - 2bc - 2ac = 0 & \qquad (3)
\end{aligned}$$

Betrachtet man nun $(a + b - c)^2$, dann ergibt sich:

$$(a + b - c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2bc - 2ac \underbrace{=}_{\text{wegen Gleichung 3}} a^2 + b^2 + c^2$$

Da a, b und c nach Voraussetzung ganze Zahlen sind, ist auch $(a+b-c)$ eine ganze Zahl. Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt $a + b \geq c$ und damit auch $a + b - c \geq 0$.
Das bedeutet, dass solange das Dreieck nicht entartet, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b - c)^2$ eine Quadratzahl ist.

Die Behauptung der Aufgabe gilt nicht in entarteten Dreiecken (außer für den Fall $a = b = c = 0$).
Beweis:
Das Dreieck kann entarten, da mit den Winkeln $\alpha = \beta = 0°$ und $\gamma = 180°$ alle Höhen gleich 0 sind (ergibt sich aus $h_a = b * \sin(\gamma)$, usw. mit $\sin(0°) = \sin(180°) = 0$) und damit auch $h_a + h_b = h_c = 0$ gilt.
Wenn das Dreieck entartet, gilt Gleichheit in der Dreiecksungleichung. Man kann deswegen ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $a + b = c$ gilt. Daraus folgt, dass $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (a + b)^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2ab$ ist.
Annahme: Sei $a^2 + b^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2ab = x^2$, also eine Quadratzahl
Dann folgt daraus:

$$2a^2 + 2b^2 + 2ab = 2(a + b)^2 - 2ab = x^2 \qquad \Rightarrow \ (a + b)^2 - ab = \frac{x^2}{2} \tag{4}$$

Da auf der linken Seite nach Voraussetzung ganze Zahlen stehen, muss auch auf der rechten Seite eine ganze Zahl stehen, d.h. dass x^2 und damit auch x durch zwei teilbar ist. Also gibt es ein $x_1 \in \mathbb{N}$, sodass gilt $x = 2x_1$:

$$(a + b)^2 - ab = \frac{x^2}{2} = 2x_1^2 \qquad \Rightarrow \ \frac{(a + b)^2 - ab}{2} = x_1^2$$

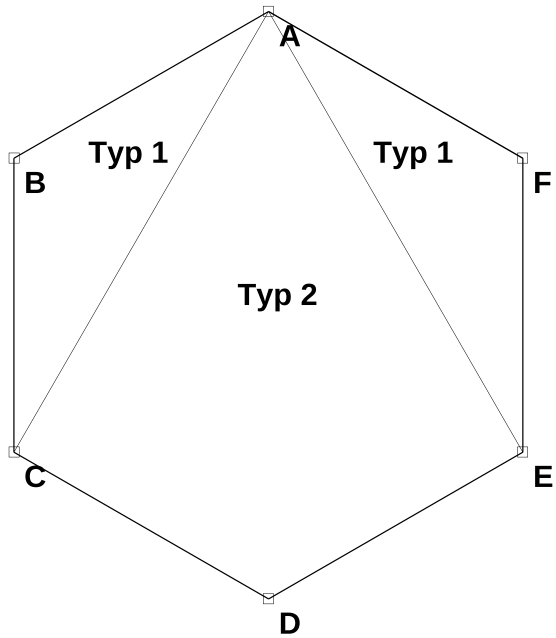
Da auf der rechten Seite eine ganze Zahl steht, muss auf der linken Seite auch eine ganze Zahl stehen, d.h. $(a+b)^2 - ab$ ist durch zwei teilbar. Daher müssen $(a+b)^2$ und ab entweder beide gerade oder ungerade sein. Ein Produkt ist nur dann ungerade, wenn beide Faktoren ungerade sind, d.h. wenn das Produkt ab ungerade ist, ist die Summe $a+b$ gerade. Also können nicht beide ungerade sei, d.h. sie müssen beide gerade sein. Da nicht beide Faktoren des Produkts ab ungerade sein können und die Summe gerade sein soll, müssen a und b gerade sein. D.h. es gibt zwei Zahlen a_1, $b_1 \in \mathbb{N}$ für die gilt: $a = 2a_1$ und $b = 2b_1$. Also:

$$\frac{(a + b)^2 - ab}{2} = 2(a_1 + b_1)^2 - 2a_1 b_1 = x_1^2$$

Damit hat man wieder die selbe Form wie in Gleichung 4. D.h. man kann diesen Zyklus immer weiter führen, was nach sich zieht, dass a, b und x unendlich oft durch zwei teilbar sind. Dies ist aber außer für den Trivialfall $a = b = x = 0$ nicht möglich, daher muss die Annahme $2a^2 + 2b^2 + 2ab$ sei eine Quadratzahl für a oder b ungleich 0 falsch sein. ('Infinite Descent')

Aufgabe 3

Beide Sechsecke werden wie dieses in zwei kongruente Dreiecke und ein Viereck zerlegt:



$ABCDEF$ ist nach Voraussetzung ein regelmäßiges Sechseck. Für die Zerlegung gilt:

I. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FA}$, da $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck ist.

II. $\angle CBA = \angle DCB = \angle EDC = \angle FED = \angle AFE = \angle BAF = 720°/6 = 120°$, weil $ABCDEF$ ein regelmäßies Secheck ist.

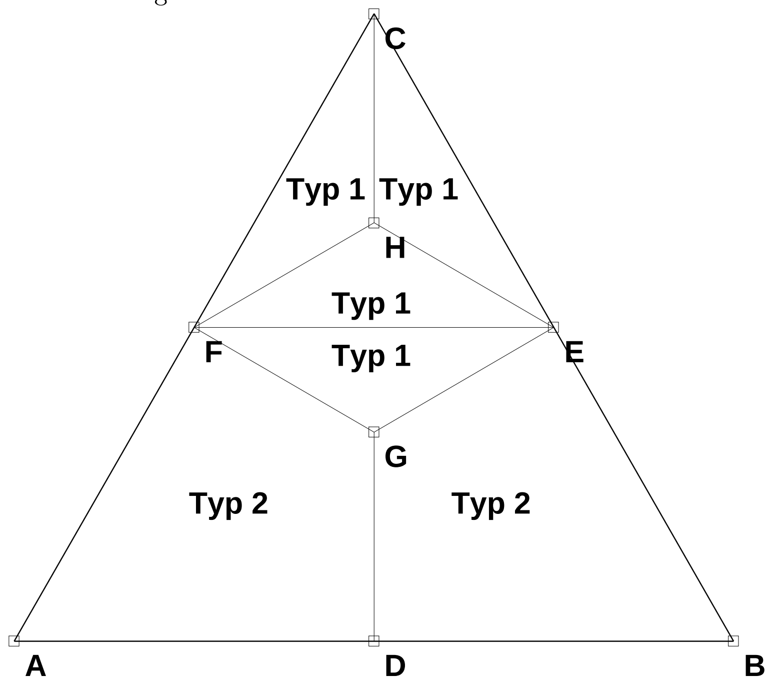
III. $\overline{AC} = \overline{AE}$, aus Symmetriegründen.

IV. Die Dreiecke ABC und EFA sind gleichschenklig (wegen I) und kongruent zueinander (Kongruenzsatz SSS, wegen I und III).

V. $\angle BAC = \angle ACB = \angle FEA = \angle EAF = (180° - 120°)/2 = 30°$, da die Dreiecke ABC und EFA nach IV gleichschenklig sind und nach II $\angle CBA = \angle AFE = 120°$ gilt.

VI. $\angle DCA = \angle AED = \angle DCB - \angle ACB = \angle FED - \angle FEA = 90°$, nach II und V.

Und so wieder zusammengesetzt:



a. Weil die beiden Vierecke $ADGF$ und $DBEG$ vom gleichen Typ sind, gibt es die Strecke $\overline{DG}$.

b. $\overline{AB}$ ist eine Strecke, auf der D liegt, da nach VI $\angle GDA + \angle BDG = 180°$ gilt.

c. Aus a und b folgt, dass $ABEGF$ ein Fünfeck ist.

d. Da $\angle EGF = 120°$ (nach II) der Komplementärwinkel von $\angle FGE = \angle DGE + \angle FGD = 120° + 120° = 240°$ (nach II) ist, passt das Dreieck FGE ohne Überschneidungen oder Lücken in die Einbuchtung FGE des Fünfecks $ABEGF$.

e. Nach I ist die Strecke $\overline{FG}$ des Dreiecks FGE und des Vierecks $ADGF$ gleich groß. Dies gilt aus dem selben Grund auch für die Strecke $\overline{EG}$ des Dreiecks FGE und des Vierecks $DBEG$. Daher ist $ABEF$ ein Viereck.

f. FEC ist ein gleichseitiges Dreieck, da die 3 gleichschenkligen Teildreiecke vom gleichen Typ, also paarweise kongruent sind und der Winkel in H nach II $3 * 120° = 360°$ groß ist.

g. Da die Dreiecke FEH und FGE vom gleichen Typ sind, gibt es die Strecke $\overline{FE}$.

h. Wegen e, f und g ist $ABECF$ ein Fünfeck.

i. $\overline{AC}$ ist eine Strecke auf der F liegt, da $\angle AFC = \angle AFG + \angle GFE + \angle EFH + \angle HFC = 90° + 3 * 30° = 180°$ (nach VI und V) ist. Analog kann man zeigen, dass $\overline{BC}$ eine Strecke ist, auf der E liegt.

j. Aus h und i folgt, dass ABC ein Dreieck ist.

k. Nach III gilt $\overline{AF} = \overline{FC} = \overline{CE} = \overline{EB} = \overline{BD} = \overline{DA}$, d.h. ABC ist ein gleichseitiges Dreieck.

Also gibt es eine Zerlegung zweier kongruenter Sechsecke, die sich lückenlos und überschneidungsfrei zu einem geleichseitigen Dreieck zusammensetzen lässt.

Hilfssatz 2

Seien x, y und z positive reele Zahlen, dann gilt $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ und nur unter der Bedingung $x = y = z$ sind beide Seiten gleich.
Beweis:
Sei $p = \frac{y}{x}$ und $q = \frac{z}{y}$ (x, y, $z > 0$, also auch p, $q > 0$), dann soll gelten: $x^3 + x^3p^3 + x^3p^3q^3 \geq 3x^3p^2q$ oder da $x > 0$: $1 + p^3 + p^3q^3 \geq 3p^2q$
Fasst man nun $1 + p^3 + p^3q^3 - 3p^2q$ als Funktion f von p (> 0) auf, dann soll gelten: $f(p) \geq 0$
Für das Minimum der Funktion $f(p)$ braucht man jetzt die Nullstellen der Ableitung:

$$\begin{aligned}
& f'(p_0) = 3p_0^2(1+q^3) - 6p_0q = 0 & \\
\Leftrightarrow\ & p_0(1+q^3) - 2q = 0 & \text{da } p_0 > 0 \text{ nach Voraussetzung} \\
\Leftrightarrow\ & p_0 = \frac{2q}{1+q^3} & \text{da } q > 0 \text{ nach Voraussetzung}
\end{aligned}$$

Um nachzuweisen, dass an der Stelle p_0 ein globales Minimum der Funktion $f(p)$ vorliegt, muss man sich die erste Ableitung genauer anschauen:

$$\begin{aligned}
& f'(p) = 3p^2(1+q^3) - 6pq = 3p((1+q^3)p - 2q) \\
\Leftrightarrow\ & \begin{cases} f'(p) > 0 \Leftrightarrow (1+q^3)p - 2q > 0 & \text{für } p > p_0 \\ f'(p) < 0 \Leftrightarrow (1+q^3)p - 2q < 0 & \text{für } 0 < p < p_0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Die stetige Funktion $f(p)$ ist also im Intervall $]0, p_0[$ streng monoton fallend und im Intervall $]p_0, \infty[$ streng monoton wachsend. Also ist an der Stelle p_0 das globale Minimum der Funktion $f(p)$, das nur in diesem Punkt angenommen wird.
$f(p_0)$ ist:

$$\begin{aligned}
f(p_0) = 1 + p_0^3(1+q^3) - 3p_0^2q = 1 + \frac{8q^3}{(1+q^3)^2} - \frac{12q^3}{(1+q^3)^2} \\
= 1 - \frac{4q^3}{(1+q^3)^2} = \frac{(1+q^3)^2 - 4q^3}{(1+q^3)^2} = \\
\frac{(1-q^3)^2}{(1+q^3)^2} \geq 0 \qquad (5)
\end{aligned}$$

Das globale Minimum der Funktion ist größer gleich 0, also ist die ganze Funktion überall größer gleich 0.
Wegen Gleichung 5 kann $f(p)$ für $q \neq 1$ nicht 0 werden, da das globale Minimum positiv ist. Wenn $q = 1$ ist, kann die Funktion $f(p)$ nur für $p_0 = \frac{2}{1+1} = 1$ Null werden, da an der Stelle p_0 das globale Minimum ist und dies nur dort angenommen wird.

Das bedeutet $1 + p^3 + p^3q^3 \geq 3p^2q$, also $x^3 + y^3 + z^3 \geq 3xyz$ gilt und Gleichheit tritt nur ein, wenn $1 = p = \frac{y}{x} = q = \frac{z}{y}$, d.h. $x = y = z$ gilt.

Aufgabe 4

Habe der ursprüngliche Würfel die Kantenlänge a. Sei n die Anzahl der Quader.
Jeder Quader wird eindeutig durch seine 3 Kantenlängen x, y und z beschrieben, d.h. die Zerlegung des Würfels in Quader kann man eindeutig beschreiben, indem man festlegt, dass x_i, y_i und z_i die Kantenlängen des i-ten Quaders sind.
Da durch die Zerlegung das Gesamtvolumen unverändert bleibt, muss dann gelten:

$$a^3 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i \tag{6}$$

Nach Voraussetzung gilt, dass das Umkugelvolumen des Würfels gleich der Summe der Umkugelvolumen der Quader ist, d.h.: (mit dem Volumen V einer Kugel mit dem Radius r: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ und der Raumdiagonalen R eines Quaders $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$)

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{3a^2}}{2}\right)^3 &= \sum_{i=1}^{n} \frac{4\pi}{3}\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{2}\right)^3 \qquad |/\left(\frac{4\pi}{3}\frac{1}{8}\right) \\
\Rightarrow \left(\sqrt{3}a\right)^3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}\right)^3 \qquad |/(\sqrt{3})^3 \\
\Rightarrow a^3 &= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{3}}\right)^3
\end{aligned} \tag{7}$$

Zieht man nun die Gleichung 6 von der Gleichung 7 ab, ergibt sich:

$$a^3 - a^3 = 0 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i z_i = \sum_{i=1}^{n}\left(\left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - x_i y_i z_i\right) \tag{8}$$

Mit $x = \sqrt[3]{x_i^2}$, $y = \sqrt[3]{y_i^2}$ und $z = \sqrt[3]{z_i^2}$ ergibt sich aus dem *Hilfssatz 2* (x_i, y_i, z_i sind positiv, da sie Längen darstellen):

$$\begin{aligned}
x^3 + y^3 + z^3 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 &\geq 3\sqrt[3]{x_i^2 y_i^2 z_i^2} = 3xyz \qquad |/3 \quad |^{\frac{3}{2}} \\
\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{3}}\right)^3 &\geq x_i y_i z_i \\
\Rightarrow \left(\frac{\sqrt{x_i^2 + y_i^2 + z_i^2}}{\sqrt{3}}\right)^3 - x_i y_i z_i &\geq 0
\end{aligned} \tag{9}$$

Nach Gleichung 9 sind alle Summanden in Gleichung 8 nichtnegativ. Da die Summe aller Summanden 0 sein soll, muss jeder einzelne Summand 0 sein. Wäre dies nicht so, wäre die Summe größer als eine positive Zahl und daher nicht 0.
Das bedeutet aber nach *Hilfssatz 2*, dass $x = y = z$, also auch $x_i = y_i = z_i$ für alle i gelten muss, was wiederum bedeutet, dass alle Quader Würfel sind.