Verwendete Literatur:
"Elementare Zahlentheorie" von Reinhold Remmert und Peter Ulrich:
S.34 für den Hilfssatz 1 zu Aufgabe 1
"Taschenbuch der Mathematik" ("Bronstein"):
S.133, 3.1.6.1.3 zur Lösungsfindung von Aufgabe 3
"Problem-Solving Strategies" von Arthur Engel:
S.128f für den Hilfssatz 2 zu Aufgabe 4
`http://mathworld.wolfram.com/PellEquation.html`:
Gleichung 38 - 40 für den Hilfssatz 3 zu Aufgabe 4
Programme:
"Zirkel und Lineal" (Z.u.L.) für die Zeichnungen der Aufgabe 2 und 3
Cinderella zur Lösungsfindung von Aufgabe 3

Für diese Aufgabe ist es sinnvoll die natürlichen Zahlen als die positiven ganzen Zahlen zu definieren.

Hilfssatz 1 (Anzahl der Teiler einer natürlichen Zahl)

Es sei n eine natürliche Zahl, die die eindeutige Primfaktorzerlegung $n = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdots p_r^{m_r} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ hat, wobei p_i paarweise verschiedene Primzahlen und m_i natürliche Zahlen sind. Dann ist die Anzahl ihrer Teiler $\tau(n)$ gleich

$$\prod_{i=1}^{r}(m_i + 1).$$

Beweis

Für $n = 1$ stimmt die Aussage, da n nur den einen Teiler 1 hat und $\prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$ gleich dem leeren Produkt, also auch eins ist.
Sei z eine natürliche Zahl, die $n > 1$ teilt. Dann muss man z so darstellen können:

$$z = \prod_{i=1}^{r} p_i^{t_i} \text{ mit } 0 \leq t_i \leq m_i \text{ und } t_i \text{ ganz} \tag{1}$$

Würde z andere Primfaktoren enthalten, würden diese n nicht teilen und damit wäre n/z nicht ganzzahlig, d.h. z wäre kein Teiler von n. Wäre ein oder mehrere $t_i > m_i$, wäre n/z auch wieder nicht ganzzahlig, da $z/p_i^{m_i}$ gegenüber $n/p_i^{m_i}$ noch den Primfaktor p_i hat.
Außerdem sind alle durch Gleichung 1 beschriebenen Zahlen Teiler von n, da $n/z = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i - t_i}$ mit $m_i - t_i \geq 0$ gilt, d.h. n/z ist ganzzahlig.
Da t_i $m_i + 1$ verschiedene Werte annehmen kann, alle ganzzahligen zwischen 0 und m_i, können mit Gleichung 1 $\prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$ verschiedene Zahlen dargestellt werden. Weil Gleichung 1 genau alle Teiler darstellt, gilt somit für die Anzahl der Teiler $\tau(n)$:

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$$

Für eine natürliche k-typische Zahl n, die die Teiler t_i hat, gilt, dass $t_i - 1$ für alle i durch k teilbar ist. Dies folgt direkt aus der Definition für k-typische Zahlen.

Aufgabe 1

Teilaufgabe a:

Für $n = 1$ stimmt die Aussage, da $\tau(1) = 1$ für alle k k-typisch ist und $1^k = 1$ gilt.
Sei $n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i}$ eine natürliche Zahl größer 1, deren Teileranzahl $\tau(n) = \prod_{i=1}^{r}(m_i + 1)$ k-typisch ist, dann bedeutet das, dass insbesondere alle $(m_i + 1) - 1 = m_i$ durch k teilbar sind, da alle $(m_i + 1)$ Teiler von $\tau(n)$ sind. Das wiederum bedeutet, dass für alle m_i eine natürliche Zahl d_i existiert, sodass $m_i = k \cdot d_i$ gilt. Daraus folgt, dass sich n so darstellen lässt:

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{m_i} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{k \cdot d_i} = \left(\prod_{i=1}^{r} p_i^{d_i}\right)^k = z^k \text{ mit } z = \prod_{i=1}^{r} p_i^{d_i}$$

z ist dabei eine natürliche Zahl, da alle d_i natürliche Zahlen sind. Also ist n eine k-te Potenz einer natürlichen Zahl.
Daher sind alle natürlichen Zahlen mit einer k-typischen Teileranzahl k-te Potenzen natürlicher Zahlen.

Teilaufgabe b:

Sei k eine natürliche Zahl größer 2 und sei p eine Primzahl. Sei nun

$$n = \left(p^{k-2}\right)^k = p^{k(k-2)},$$

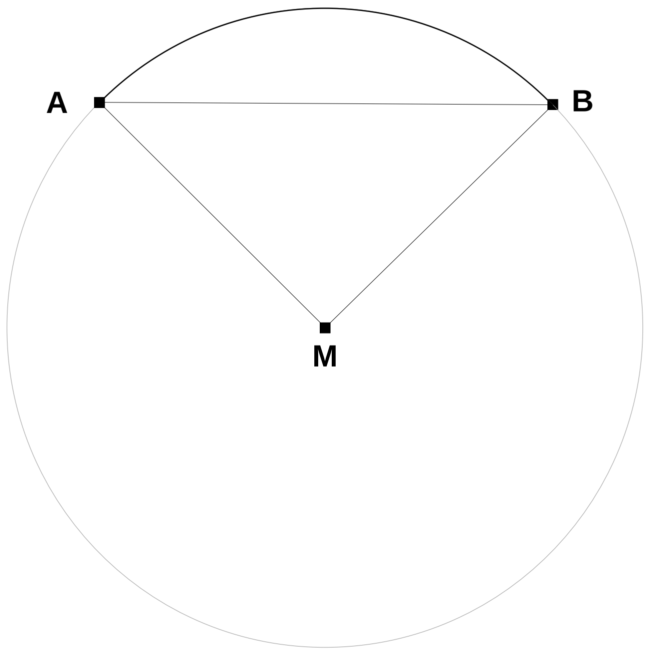
dann ist n eine k-te Potenz einer natürlichen Zahlen ungleich 1 ($k - 2 > 0$). Nun gilt für die Anzahl der Teiler:

$$\tau(n) = \prod_{i=1}^{1}(m_i + 1) = k(k-2) + 1 = k^2 - 2k + 1 = (k-1)^2$$

Also wird die Anzahl der Teiler dieser k-ten Potenz von $k-1$ geteilt, d.h. aber sie ist nicht k-typisch, da für $k > 2$ k nicht $k - 1$ teilen kann (für $k > 2$ gilt immer $ggt(k, k-1) = 1$). Da dies für alle $k > 2$ gilt, ist die Umkehrung von a) für $k > 2$ falsch.

Aufgabe 2

Sei s_i die Länge der i-ten Sehne und sei n die Anzahl der Sehnen. Dann ist die Aufgabenstellung äquivalent zur Ungleichung $\sum_{i=1}^{n} s_i < k \cdot \pi$.
Jeder Sehne (die nicht ein Durchmesser ist) kann eindeutig ein Kreisbogen zugeordnet werden, der auf der Peripherie des Kreises liegt und die Schnittpunkte der Sehne mit dem Kreis so verbindet, dass nicht der Mittelpunkt des Kreises vom Kreisbogen und der Sehne eingeschlossen wird. Bei einem Durchmesser kann man von den beiden Kreisbögen/Halbkreisen einen willkürlich auswählen (beide sind gleichberechtigt) und einen Endpunkt des Halbkreises entfernen.



Hier wird der Sehne $\overline{AB}$ ein Kreisbogen $\overset{\frown}{AB}$ zugeordnet.

Ersetzt man jede Sehne durch so einen Kreisbogen, dann ändert diese Operation nichts an der Eigenschaft, ob ein Durchmesser Punkte mit einer Sehne gemeinsam hat, sie verschiebt sie nur auf die Kreisperipherie.
Jeder Kreisbogen einer Sehne, die kein Durchmesser ist, hat maximal einen Schnittpunkt mit einem Durchmesser, da Sehne und Durchmesser nur 0, 1 oder unendlich viele Punkte gemeinsam haben können, letzteres aber ausgeschloßen ist und da die Eigenschaft bei dieser Operation erhalten bleibt (die Schnittpunkte werden nur verschoben).
Der Kreisbogen einer Sehne, die ein Durchmesser ist, hat maximal einen Schnittpunkt mit einem Durchmesser, wenn dieser nicht die Basis des Halbkreises ist (gleiche Begründung wie oben). Da ein Endpunkt des Halbkreises entfernt wurde, hat die Basis des Halbkreises auch nur einen Punkt mit ihm gemeinsam.
Also hat jeder Kreisbogen maximal einen Schnittpunkt mit einem Durchmesser.
Sei b_i die Länge des i-ten Kreisbogens der die i-te Sehne ersetzt, dann gilt $s_i < b_i$, da Geraden in der euklidischen Geometrie die kürzesten Verbindungen von zwei Punkten sind und der Kreisbogen nicht mit der Geraden/Sehne identisch ist, aber die selben Endpunkte verbindet. Dies gilt auch für eine Sehne die ein Durchmesser ist, da ein Punkt bei der Längenmessung keine Rolle spielen.
Da $\sum_{i=1}^{n} s_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$ gilt, reicht es um $\sum_{i=1}^{n} s_i < k \cdot \pi$ zu beweisen, $\sum_{i=1}^{n} b_i \leq k \cdot \pi$ zu zeigen:
Zieht man nun einen bebliebigen Durchmesser, wählt einen der beiden entstehenden Halbkreise aus und überführt die Kreisbögen und Kreisbogenstücke des anderen Halbkreises in den ausgewählten durch Punktspiegelung am Mittelpunkt des Kreises, dann liegen diese gespiegelten Kreisbögen und Kreisbogenstücke wieder auf der Kreisperipherie und es sind nur noch im ausgewählte Halbkreis Kreisbögen. Bei dieser Operation werden Kreisbögen, die mit dem ausgewählten Durchmesser einen Punkt (mehr geht nicht) gemeinsam haben (maximal k), in zwei Stücke geteilt, d.h. die Anzahl der Kreisbogenstücke nimmt um maximal k zu, die Gesamtlänge der Kreisbögen bleibt aber gleich, da die Punktspiegelung längenerhaltend ist. Die Anzahl der Sehnen mit denen ein Durchmesser ein Punkt (mehr geht nicht) gemeinsam hat, bleibt bei dieser Operation gleich, da ein Durchmesser bei

einer Punktspiegelung am Kreismittelpunkt auf sich selbst abgebildet wird.
Da man die Hälfte des Durchmessers im nicht ausgewählten, leeren Halbkreis vernachlässigen kann (den Fall, wo der Durchmesser mit der Basis des ausgewählten Halbkreises identisch ist, kann man vernachlässigen, da eine endliche Anzahl von Punkten (0-dimensionale Gebilde) bei der Längenmessung keine Rolle spielen), hat der Radius im ausgewählten Halbkreis maximal k Schnittpunkte mit Kreisbögen auf der Kreisperipherie, d.h. die Gesamtlänge der Kreisbögen ist durch k mal die halbe Kreisperipherie (Halbkreis) nach oben beschränkt. In Formeln heißt das unter Berücksichtigung von $r = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i \leq k \cdot (2\pi)/2 = k \cdot \pi$$

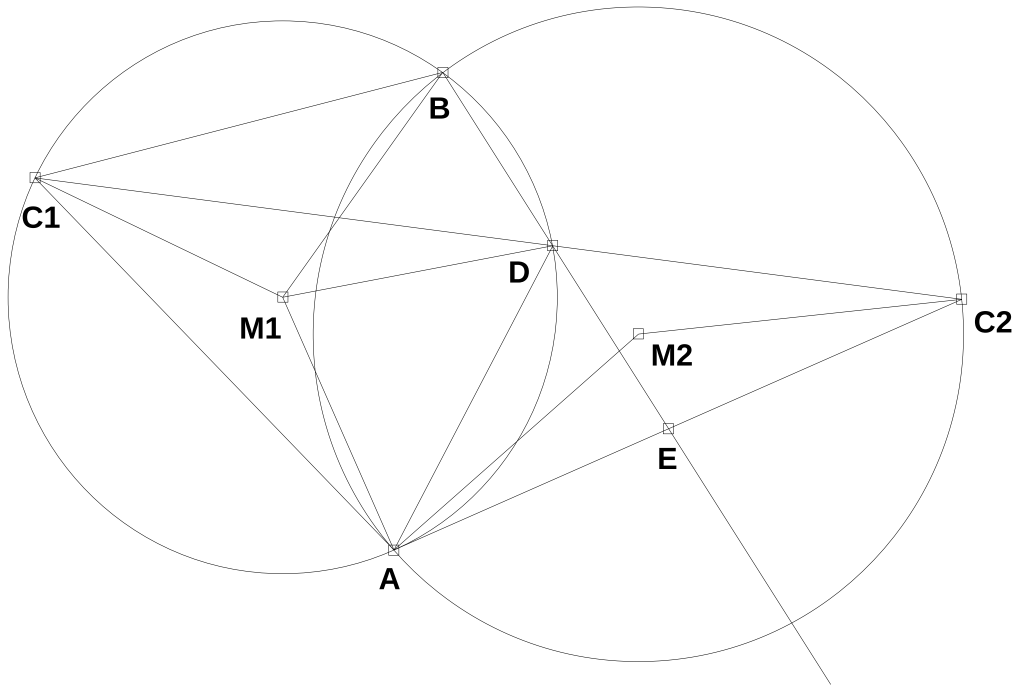
Da $\sum_{i=1}^{n} s_i < \sum_{i=1}^{n} b_i$ gilt, folgt daraus:

$$\sum_{i=1}^{n} s_i < k \cdot \pi$$

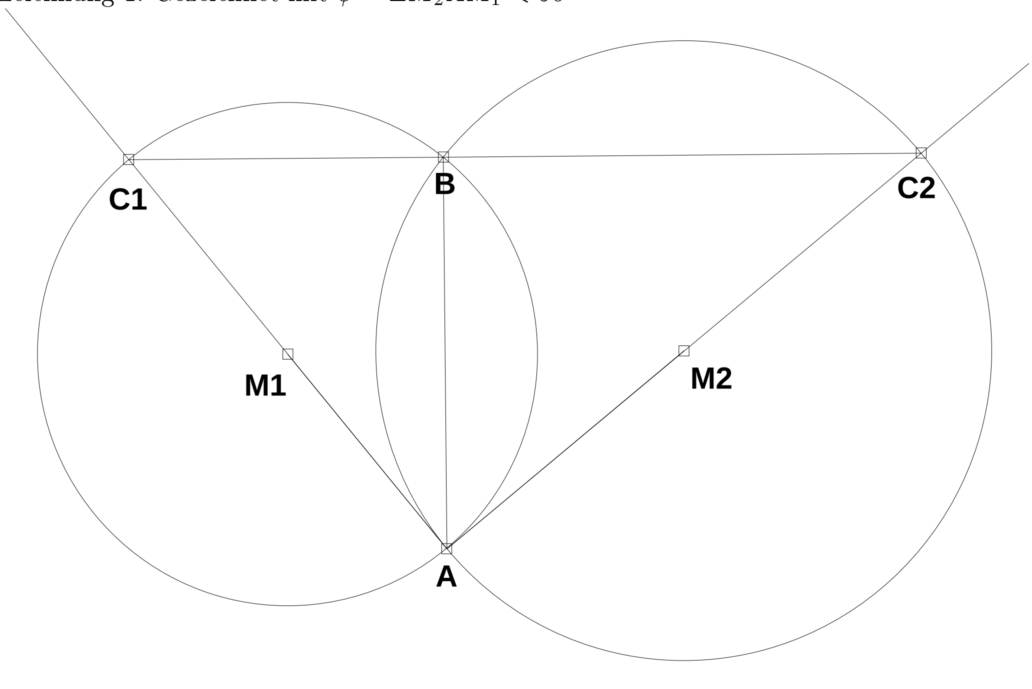
Also ist Gesamtlänge der Sehnen kleiner $k \cdot \pi$.

Bei Winkeln ist die positive Drehrichtung im Gegenuhrzeigersinn.

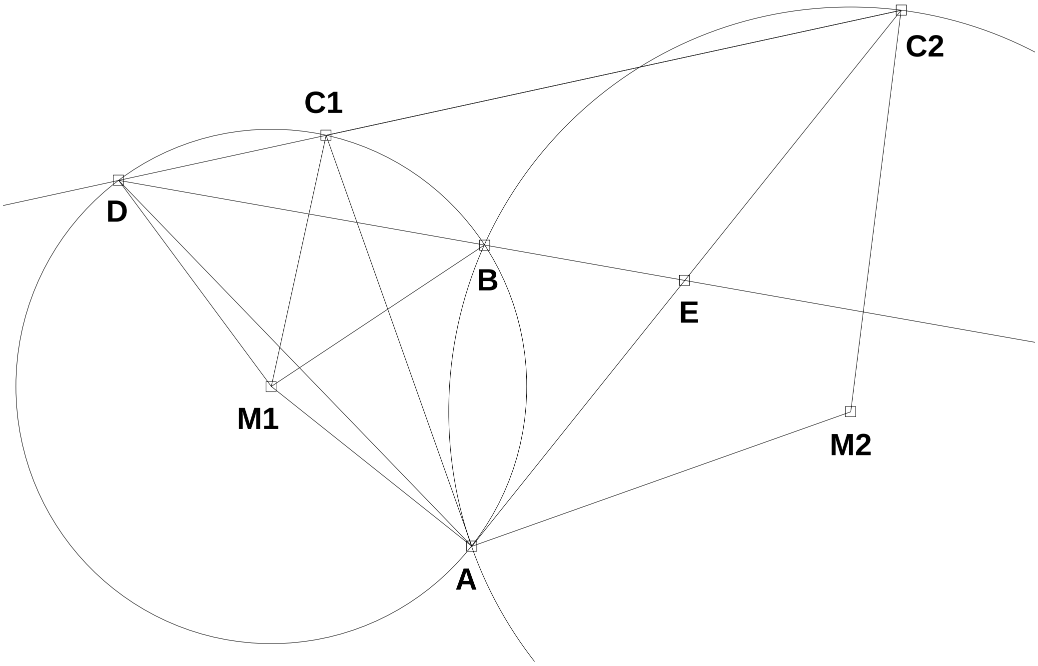
Aufgabe 3



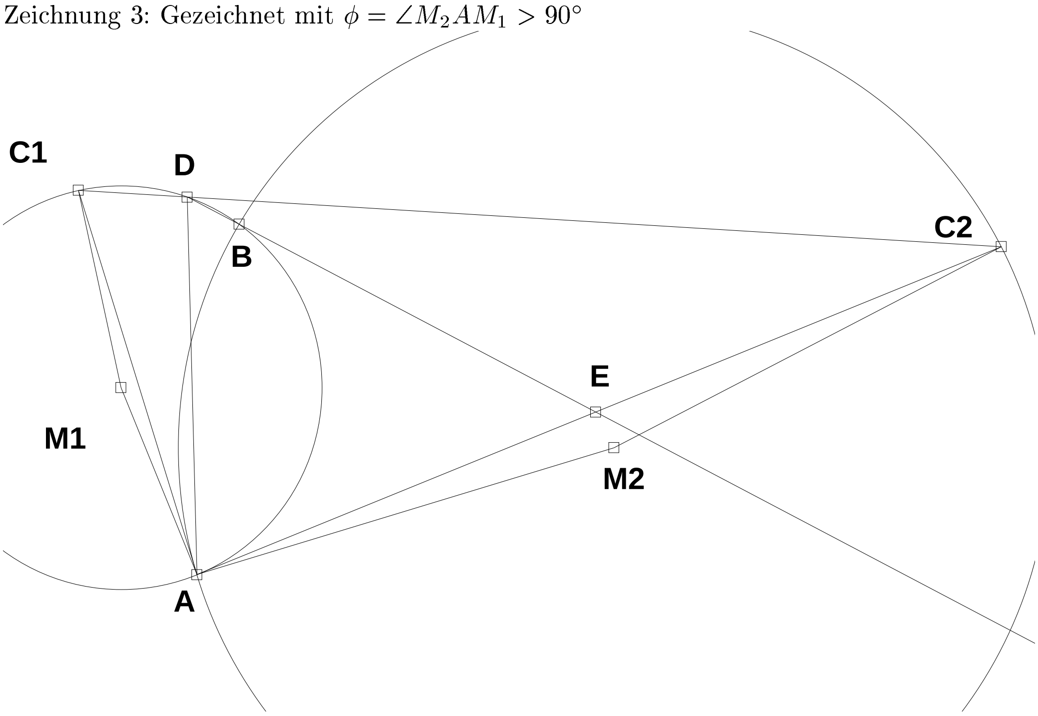
Zeichnung 1: Gezeichnet mit $\phi = \angle M_2AM_1 < 90°$



Zeichnung 2: Gezeichnet mit $\phi = \angle M_2AM_1 = 90°$



Zeichnung 3: Gezeichnet mit $\phi = \angle M_2AM_1 > 90^\circ$



Zeichnung 4: Gezeichnet mit $\phi = \angle M_2AM_1 > 90^\circ$

In den Zeichnungen sind M_1 und M_2 die Mittelpunkte der Kreise k_1 und k_2 und E ist der Schnittpunkt von $\overline{AC_2}$ mit $\overline{BD}$ (sofern er existiert).
Die einzigen Parameter bei dieser Konstruktion sind der Abstand der Kreise und ihre Radien. Wenn diese gegeben sind, ist die Konstruktion eindeutig beschrieben. Dabei sind diese nicht gänzlich frei, da für das Dreieck $\triangle M_2AM_1$ die Dreiecksungleichungen gelten und $D \not\equiv B$ und $D \not\equiv C_1$ sein soll.

Seien

$$x = \overline{M_1 A} \tag{2}$$
$$y = \overline{M_2 A} \tag{3}$$
$$d = \overline{M_1 M_2} \tag{4}$$
$$\text{und } \phi = \angle M_2 A M_1, \tag{5}$$

also die Radien der Kreise k_1 und k_2, der Abstand der Mittelpunkte und der Schnittwinkel der Radien im Punkt A, dann gilt der Zusammenhang:

$$d^2 \underbrace{=}_{\text{Kosinussatz}} x^2 + y^2 - 2xy\cos\phi \tag{6}$$

Bei gegebenen d lässt sich daraus ϕ brechnen und umgekehrt, d.h. zur vollständigen Charakterisierung der Konstruktion reichen die Größen x, y und ϕ.
x und y können dabei beliebig sein, ϕ muss dagegen im Intervall $]0°; 180°[$ liegen, damit $\triangle M_2 A M_1$ ein Dreieck ist. d ist reell, da $x^2 + y^2 - 2xy\cos\phi > x^2 + y^2 - 2xy = (x-y)^2 \geq 0$ gilt.

Es gilt

$$\angle M_2 AB < 90° \text{ bzw. } \angle BAM_2 < 90°, \tag{7}$$

da ein Winkel kleiner 180° ist, denn beide ergänzen sich zu 360° und $\angle M_2 AB = \angle BAM_2 = 180°$ bedeuten würde, dass A, B und M_2 auf einer Linie liegen, was aber nur dann sein kann, wenn die Punkte A und B zusammenfallen, d.h. die Kreise sich nur berühren, da $\overline{AB}$ aufgrund der Spiegelsymmetrie des Vierecks $C_1 B C_2 A$ an $\overline{M_1 M_2}$ senkrecht auf $\overline{M_1 M_2}$ steht . Dies widerspricht aber der Voraussetzung, dass die Kreise zwei unterschiedliche Schnittpunkte haben sollen. Gleichung 7 folgt dann daraus, dass das Dreieck $\triangle BM_2 A$ (bei $\angle M_2 AB < 180°$) bzw. $\triangle AM_2 B$ (bei $\angle BAM_2 < 180°$) ein gleichschenkliges Dreieck ist ($\overline{AM_1}$ und $\overline{AM_2}$ sind Radien von k_2) und daher $\angle M_2 AB = \angle ABM_2$ bzw. $\angle BAM_2 = \angle M_2 BA$ gilt. Wäre $\angle M_2 AB > 90°$ bzw. $\angle BAM_2 > 90°$, dann wäre die Innenwinkelsumme des Dreiecks $\triangle BM_2 A$ bzw. $\triangle AM_2 B$ größer 180°. Gleichheit würde bedeuten, dass $\angle BM_2 A$ bzw. $\angle AM_2 B$ 0° wäre, was wiederum bedeutet, dass A, B und M_2 auf einer Linie liegen, was aber, wie oben schon gezeigt wurde, nicht sein darf. Daher gilt Gleichung 7.
Analog kann man zeigen, dass

$$\angle BAM_1 < 90° \text{ bzw. } \angle M_1 AB < 90° \tag{8}$$

gilt.

Wenn $\phi < 90°$ gilt, dann liegt von $\overline{C_1 A}$ ausgehend der Punkt B auf der gleichen Seite, wie der Punkt M_1. Das liegt daran, dass $\angle M_2 AC_1 = 90°$ gilt, da die Tangente $\overline{AC_1}$ in A an k_2 senkrecht auf dem Radius $\overline{AM_2}$ steht. Außerdem gilt $\angle M_2 AB < 90°$ bzw. $\angle BAM_2 < 90°$ (Gl. 7 (S. 8)) und nach Voraussetzung ist $\phi = \angle M_2 AM_1 < 90°$ (Gl. 5 (S. 8)). Analog kann man zeigen, dass von $\overline{C_2 A}$ ausgehend der Punkt B auf der gleichen Seite liegt, wie der Punkt M_2.
Wenn $\phi > 90°$ gilt, dann liegt von $\overline{C_1 A}$ ausgehend der Punkt B nicht auf der gleichen Seite, wie der Punkt M_1. Das liegt daran, dass $\angle M_2 AC_1 = 90°$ gilt, da die Tangente $\overline{AC_1}$ in A an k_2 senkrecht auf dem Radius $\overline{AM_2}$ steht. Außerdem gilt $\angle M_2 AB < 90°$ bzw. $\angle BAM_2 < 90°$ (Gl. 7 (S. 8)) und nach Voraussetzung ist $\phi = \angle M_2 AM_1 > 90°$ (Gl. 5 (S. 8)). Analog kann man zeigen, dass von $\overline{C_2 A}$ ausgehend der Punkt B nicht auf der gleichen Seite liegt, wie der Punkt M_2.

Sei

$$\alpha = \angle C_2 AC_1 \tag{9}$$

Dann gilt für α:

$$\alpha = 180° - \phi \tag{10}$$

Beweis

$$\angle M_2AC_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_1} \text{ die Tangente an den Kreis } k_2 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\angle C_2AM_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_2} \text{ die Tangente an den Kreis } k_1 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\alpha = \angle M_2AC_1 + \angle C_2AM_1 - \angle M_2AM_1 \underbrace{=}_{\text{Gl. 5 (S. 8)}} 180° - \phi$$

(die Summe der Einzelwinkel minus den gemeinsamen Winkel)

□

Es gilt:

$$2\phi = \angle C_1M_1A = \angle AM_2C_2$$

Beweis

Die Dreiecke $\triangle C_1M_1A$ und $\triangle AM_2C_2$ sind gleichschenklig, weil $\overline{C_1M_1}$ und $\overline{M_1A}$ Radien von k_1 und $\overline{C_2M_2}$ und $\overline{M_2A}$ Radien von k_2 sind. Daher gilt:

1. Fall $2\phi < 180°$, $\angle C_1M_1A < 180°$ und $\angle AM_2C_2 < 180°$:

(Zeichnung 1)

$$\angle M_1AC_1 = 90° - \angle C_1M_1A/2$$
$$\angle C_2AM_2 = 90° - \angle AM_2C_2/2$$
$$\angle M_2AC_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_1} \text{ die Tangente an den Kreis } k_2 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\angle C_2AM_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_2} \text{ die Tangente an den Kreis } k_1 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\phi = \angle M_2AM_1 = \angle M_2AC_1 - \angle M_1AC_1 = \angle C_1M_1A/2$$
$$\phi = \angle M_2AM_1 = \angle C_2AM_1 - \angle C_2AM_2 = \angle AM_2C_2/2$$
$$\Rightarrow 2\phi = \angle C_1M_1A = \angle AM_2C_2$$

(Man kann annehmen, dass M_1 und M_2 von $\overline{C_1A}$ ausgehend auf der selben Seite liegen, da nach Voraussetzung $\angle M_2AM_1 = \phi < 90°$ (Gl. 5 (S. 8)) und $\angle M_2AC_1 = 90°$ gilt. Analog kann man dies für $\overline{C_2A}$ zeigen.)

2. Fall $2\phi = 180°$, $\angle C_1M_1A = 180°$ und $\angle AM_2C_2 = 180°$:

(Zeichnung 2)
Es stimmt nach Voraussetzung.

3. Fall $2\phi > 180°$, $\angle C_1M_1A > 180°$ und $\angle AM_2C_2 > 180°$:

(Zeichnung 3)

$$\angle C_1AM_1 = 90° - \angle AM_1C_1/2$$
$$\angle M_2AC_2 = 90° - \angle C_2M_2A/2$$
$$\angle M_2AC_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_1} \text{ die Tangente an den Kreis } k_2 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\angle C_2AM_1 = 90° \text{ nach Voraussetzung, da } \overline{AC_2} \text{ die Tangente an den Kreis } k_1 \text{ im Punkt } A \text{ ist.}$$
$$\phi = \angle M_2AM_1 = \angle M_2AC_1 + \angle C_1AM_1 = 180 - \angle AM_1C_1/2$$
$$\phi = \angle M_2AM_1 = \angle C_2AM_1 + \angle M_2AC_2 = 180 - \angle C_2M_2A/2$$
$$\Rightarrow 2\phi = 360° - \angle AM_1C_1 = 360° - \angle C_2M_2A$$

Da $C_1M_1A = 360° - \angle AM_1C_1$ bzw. $AM_2C_2 = 360° - \angle C_2M_2A$ gilt, gilt die zu beweisende Gleichung auch in diesem Fall.
(Man kann annehmen, dass M_1 und M_2 von $\overline{C_1A}$ ausgehend nicht auf der selben Seite liegen, da nach Voraussetzung $\angle M_2AM_1 = \phi > 90°$ (Gl. 5 (S. 8)) und $\angle M_2AC_1 = 90°$ gilt. Analog kann man dies für $\overline{C_2A}$ zeigen.) □

Daher macht es Sinn, dies zu definieren:

$$\gamma = \angle C_1M_1A = \angle AM_2C_2 = 2\phi \underbrace{=}_{\text{Gl. 10 (S. 8)}} 360° - 2\alpha \tag{11}$$

Nur für den Fall $\phi = 90°$ liegt B auf $\overline{C_1C_2}$.

Beweis

B ist nur dann auf $\overline{C_1C_2}$, wenn $\angle C_1BC_2 = 180°$ gilt (sonst wäre $\triangle C_1BC_2$ ein normales Dreieck). Unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes über AC_1 und AC_2 gilt:

1. Fall $\phi < 90°$:

(Zeichnung 1)

$$\angle C_1BC_2 = \angle C_1BA + \angle ABC_2 = \angle C_1M_1A/2 + \angle AM_2C_2/2 = \gamma = 2\phi < 180°$$

(Es wurde schon bewiesen, dass M_1 bzw. M_2 von $\overline{AC_1}$ bzw. $\overline{AC_2}$ ausgehend auf der selben Seite wie B liegen.)

2. Fall $\phi = 90°$:

(Zeichnung 2)

$$\angle C_1BC_2 = \angle C_1BA + \angle ABC_2 = \angle C_1M_1A/2 + \angle AM_2C_2/2 = \gamma = 2\phi = 180°$$

(Nach Voraussetzung gilt $\gamma = 2\phi = 180° = \angle C_1M_1A = \angle AM_2C_2$, d.h. M_1 bzw. M_2 liegt auf C_1A bzw. C_2A.)

3. Fall $\phi > 90°$:

(Zeichnung 3)

$$\begin{aligned}\angle C_1BC_2 &= \angle C_1BA + \angle ABC_2 = (180° - \angle AM_1C_1/2) + (180° - \angle C_2M_2A/2)\\ &= (180° - (360° - \gamma)/2) + (180° - (360° - \gamma)/2) = \gamma = 2\phi > 180°\end{aligned}$$

(Es wurde schon bewiesen, dass M_1 bzw. M_2 von $\overline{AC_1}$ bzw. $\overline{AC_2}$ ausgehend nicht auf der selben Seite wie B liegen.)
Demnach liegt B nur für $\phi = 90°$ auf $\overline{C_1C_2}$. □

Da $C_1 \not\equiv B$ gilt (das hieße, dass $\angle M_2AB$ oder $\angle BAM_2$ gleich $90°$ wäre, es wurde aber schon gezeigt, das einer dieser Winkel kleiner $90°$ ist) und da Geraden mit einem Kreis maximal 2 Schnittpunkte haben können (berechnet man die Schnittpunkte im kartesischen Koordinatensystem kommt man auf eine quadratische Gleichung mit maximal 2 Lösungen), kann die Konstruktion bei $\phi = 90°$ die Eigenschaft $D \not\equiv B$ und $D \not\equiv C_1$ nicht erfüllen, da nur die Schnittpunkte C_1 und B von $\overline{C_1C_2}$ mit k_1 existieren können, ein dritter aber nicht. Also ist die Konstruktion für $\phi = 90°$ nicht der Aufgabe entsprechend und braucht daher hier nicht weiter behandelt werden.

Bei $\phi < 90°$ ist das Viereck C_1BC_2A konvex, da $\angle AC_1B + \angle BC_2A + \angle C_2AC_1 + \angle C_1BC_2 = 360°$ (Innenwinkelsumme des Vierecks), also $\angle AC_1B + \angle BC_2A = 360° - \alpha - 2\phi = 180° - \phi < 180°$ und $\angle C_1BC_2 = 2\phi < 180°$ sowie $\alpha = 180° - \phi < 180°$ (Gl. 10 (S. 8)) gilt, also alle Winkel kleiner $180°$ sind. Daher geht die Gerade/Diagonale $\overline{C_1C_2}$ zwischen den Punkten A und B durch, d.h. die Gerade $\overline{C_1C_2}$ hat einen Schnittpunkt auf dem Bogenstück zwischen A und B auf Kreises k_1 (innerhalb des Kreises k_2). Da das Viereck C_1BC_2A konvex ist, kann dieser Schnittpunkt nicht C_1 sein und muss daher D sein. Da M_1 (vorher bewiesen) und D (Konvexität von C_1BC_2A und D liegt auf dem Bogenstück $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises k_1) von $\overline{AC_1}$ ausgehend auf der Seite von B liegen, liegen M_1 und D von $\overline{AC_1}$ ausgehend auf der selben Seite.

Da bei $\phi > 90°$ $\angle C_1BC_2 = 2\phi > 180°$ und $\alpha = 180° - \phi < 180°$ gilt, ist das Viereck C_1BC_2A nicht konvex, insbesondere geht die Gerade $\overline{C_1C_2}$ nicht zwischen den Punkten A und B durch, d.h.

der Punkt D liegt nicht auf dem Bogenstück $\overset{\frown}{AB}$ des Kreises k_1 (innerhalb des Kreises k_2), was wiederum bedeutet, dass von $\overline{AB}$ ausgehend D nicht auf der Seite von M_2 liegt.

Sei

$$a = \overline{C_1A} \tag{12}$$
$$b = \overline{C_2A} \tag{13}$$

Dann gilt:

$$x = \frac{a}{2\sin(\alpha)} \tag{14}$$
$$y = \frac{b}{2\sin(\alpha)} \tag{15}$$

(Dies geht, da $0° < \alpha < 180°$ gilt, also $\sin(\alpha) > 0$.)

Beweis

Da die Dreiecke $\triangle C_1M_1A$ und $\triangle AM_2C_2$ gleichschenklig sind, kann man aufgrund der Spiegelsymmetrie an der Achse, die durch M_1 und der Mitte von A und C_1 bzw. M_2 und der Mitte von A und C_2 geht, den Sinussatz auf die kleinen rechtwinkligen Dreiecke anwenden:

1. Fall $\phi < 90°$:

(Zeichnung 1)

$$x \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{a}{2\sin(\gamma/2)} \underbrace{=}_{\text{Gl. 11 (S. 10)}} \frac{a}{2\sin(\phi)} \underbrace{=}_{\text{Gl. 10 (S. 8)}} \frac{a}{2\sin(\alpha)}$$
$$y \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{b}{2\sin(\gamma/2)} = \frac{b}{2\sin(\alpha)}$$

2. Fall $\phi > 90°$:

(Zeichnung 3)

$$x \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{a}{2\sin(\angle AM_1C_1/2)} = \frac{a}{2\sin((360° - \gamma)/2)} = \frac{a}{2\sin(\alpha)}$$
$$y \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{b}{2\sin(\angle AM_1C_1/2)} = \frac{b}{2\sin(\alpha)}$$

□

Weil Gleichung 14, Gleichung 15 und $\phi = 180° - \alpha$ (Gl. 10 (S. 8)) gelten, genügt es um alle gültigen Konfigurationen im Sinne der Aufgabe zu beschreiben, a, b und α anzugeben, da sich daraus x, y und ϕ eindeutig gewinnen lassen und umgekehrt. (Dabei sind a, b beliebig und α ist im Intervall $]0°; 90°[\cup]90°; 180°[$)

Sei

$$c = \overline{C_1C_2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha} \tag{16}$$

Die Dreiecke $\triangle C_2AC_1$ und $\triangle ADC_2$ sind ähnlich.

Beweis

Die Winkel $\angle C_1C_2A$ und $\angle DC_2A$ sind identisch, da nach Voraussetzung D auf $\overline{C_1C_2}$ liegt.
Unter Verwendung des Peripheriewinkelsatzes über AC_1 gilt:

1. Fall $\phi < 90°$:

(Zeichnung 1)

$$\angle C_1DA = \gamma/2 \underbrace{=}_{\text{Gl. 11 (S. 10)}} \phi \underbrace{=}_{\text{Gl. 10 (S. 8)}} 180° - \alpha$$

$$\text{damit gilt: } \angle ADC_2 = 180° - \angle C_1DA = \alpha$$

(es wurde schon gezeigt, dass sich D und M_1 von $\overline{AC_1}$ ausgehend auf der selben Seite liegen)

2. Fall $\phi > 90°$:

(M_1 kann nicht auf $\overline{AC_1}$ liegen, da sonst $\gamma = 180° \Leftrightarrow \phi = 90°$ gelten müsste, D kann nicht auf $\overline{AC_1}$ liegen, da $C_1 \not\equiv D$ gelten muss und $A \not\equiv D$ wegen $\alpha < 180°$ gilt)
a) D ist von $\overline{C_1A}$ ausgehend auf der gleichen Seite wie M_1:
(Zeichnung 3)

$$\angle ADC_2 = \angle ADC_1 = \angle AM_1C_1/2 = (360° - \gamma)/2 = 180° - \gamma/2 \underbrace{=}_{\text{Gl. 11 (S. 10)}} \alpha$$

b) D ist von $\overline{C_1A}$ ausgehend nicht auf der gleichen Seite wie M_1:
(Zeichnung 4)

$$\begin{aligned}\angle ADC_2 &= 180° - \angle C_1DA = 180° - (180° - \angle AM_1C_1/2) = \angle AM_1C_1/2 = (360° - \gamma)/2\\ &= 180° - \gamma/2 = \alpha\end{aligned}$$

Daher sind zwei und damit auch alle drei Winkel der Dreiecke $\triangle C_2AC_1$ und $\triangle ADC_2$ gleich, d.h. die Dreiecke sind ähnlich. $\square$

Da c die gegenüberliegende Seite von α im Dreieck $\triangle C_2AC_1$ ist und $\overline{AC_2} = b$ die selbe Position im Dreieck $\triangle ADC_2$ einnimmt, ist der Proportonalitätsfaktor der Dreiecke b/c. Daher gilt:

$$\overline{AD} = \frac{ab}{c} \tag{17}$$

$$\overline{DC_2} = \frac{b^2}{c} \tag{18}$$

Berechnung des Sinus und Kosinus des Winkels $\angle ADE$:

1. Fall $\phi < 90°$:

$$\angle BM_1C_1 = 360° - \gamma - \angle AM_1B = 360° - (360° - 2\alpha) - \angle AM_1B = 2\alpha - \angle AM_1B \tag{19}$$

(Es gilt $0° < 2\alpha - \angle AM_1B \Leftrightarrow \angle AM_1B/2 < \alpha$ wie weiter unten gezeigt wird.)
a) $\angle BM_1C_1 < 180°$:

$$\angle BDC_1 = \angle BM_1C_1/2 = \alpha - \angle AM_1B/2 \text{ Peripheriewinkelsatz über } \overline{C_1B}$$

(aus $\angle BM_1C_1 < 180°$ folgt, dass D und M_1 von $\overline{C_1B}$ ausgehend auf der selben Seite liegen) *b)* $\angle BM_1C_1 = 180°$ *:*

$$\angle BDC_1 = \angle BM_1C_1/2 = \alpha - \angle AM_1B/2 \text{ Peripheriewinkelsatz über } \overline{C_1B}$$

(aus $\angle BM_1C_1 = 180°$ folgt, dass M_1 auf $\overline{C_1B}$ liegt)
c) $\angle BM_1C_1 > 180°$ *:*

$$\angle BDC_1 = 180° - \angle C_1M_1B/2 = (360° - \angle BM_1C_1)/2 = \angle BM_1C_1/2 = \alpha - \angle AM_1B/2$$
$$\text{Peripheriewinkelsatz über } \overline{C_1B}$$

(aus $\angle BM_1C_1 > 180°$ folgt, dass D und M_1 von $\overline{C_1B}$ ausgehend nicht auf der selben Seite liegen)
Also gilt $\angle BDC_1 = \alpha - \angle AM_1B/2$:

$$\angle EDC_2 = \angle BDC_1 = \alpha - \angle AM_1B/2 \text{ Scheitelwinkel}$$

(hier wird nur formal mit dem Punkt E gerechnet, er stellt hier nur einen Punkt auf $\overline{BD}$ dar, der von D ausgehend nicht auf der Seite von B liegt)

$$\angle ADE = \angle ADC_2 - \angle EDC_2 \underbrace{=}_{\text{Ähnlichkeit}} \alpha - (\alpha - \angle AM_1B/2) = \angle AM_1B/2$$

$$\angle ADE = \angle AM_1B/2 = \angle AM_1M_2 \text{ Spiegelsymmetrie des Vierecks } C_1AC_2B \text{ an } \overline{M_1M_2}$$

$$\begin{aligned}
\sin(\angle AM_1M_2) &\underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{y\cdot\sin(\phi)}{d} = \frac{y\cdot\sin(\phi)}{\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos(\phi)}} \underbrace{=}_{\text{Gl. 10 (S. 8)}} \frac{y\cdot\sin(\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{y\cdot\sin(\alpha)\cdot 2\sin(\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(\alpha)}\cdot 2\sin(\alpha)} \underbrace{=}_{\text{Gl.14 und 15 (S.11)}} \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{e} \\
\text{mit } e &= \sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha)} \\
y^2 &\underbrace{=}_{\text{Kosinussatz}} x^2+d^2-2xd\cos(\angle AM_1M_2) \\
\cos(\angle AM_1M_2) &= \frac{y^2-x^2-d^2}{-2xd} = \frac{y^2-x^2-(x^2+y^2+2xy\cos(\alpha))}{-2x\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(\alpha)}} = \frac{-2x^2-2xy\cos(\alpha)}{-2x\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(\alpha)}} \\
&= \frac{(x+y\cos(\alpha))\cdot 2\sin(\alpha)}{\sqrt{x^2+y^2+2xy\cos(\alpha)}\cdot 2\sin(\alpha)} = \frac{a+b\cos(\alpha)}{\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos(\alpha)}} = \frac{a+b\cos(\alpha)}{e}
\end{aligned}$$

Da auch $0° < \angle ADE = \angle AM_1M_2 = \angle AM_1B/2 < 180° - \phi = \alpha = \angle ADC_2$ (Innenwinkelsumme von $\triangle M_2AM_1$) gilt, schneidet $\overline{BD}$ $\overline{AC_2}$ zwischen A und C_2, d.h. der Punkt E existiert und liegt zwischen A und C_2.

2. Fall $\phi > 90°$:

$$\angle ADE = \angle ADB = \angle AM_1B/2 = \angle AM_1M_2 \text{ Peripheriewinkelsatz über } \overline{AB}$$

(wieder wird hier wird nur formal mit dem Punkt E gerechnet, er stellt hier nur einen Punkt auf $\overline{BD}$ dar, der von B ausgehend nicht auf der Seite von D liegt)

(dies geht, da $\angle AM_1M_2 + \angle M_1M_2A < 90°$ (Innenwinkelsumme von $\triangle M_2AM_1$), d.h. $\angle AM_1M_2 < 90°$ und $\angle M_1M_2A < 90°$ gilt und damit liegt M_1 von der Gerade $\overline{AB}$ ausgehend nicht auf der Seite von M_2. Daher ist er auf der selben Seite wie D.)

$$\sin(\angle AM_1M_2) = \frac{b\cdot\sin(\alpha)}{e}$$
$$\cos(\angle AM_1M_2) = \frac{a+b\cos(\alpha)}{e}$$

Es gilt $0° < \angle ADE = \angle AM_1M_2 < 180° - \phi = \alpha = \angle ADC_2 < 90°$ (Innenwinkelsumme von $\triangle M_2AM_1$), weswegen sich $\overline{BD}$ und $\overline{AC_2}$ zwischen A und C_2 schneiden, d.h. der Punkt E existiert und liegt zwischen A und C_2.

Also existiert der Punkt E, liegt zwischen A und C_2 und für den Winkel $\angle ADE$ gilt:

$$\sin(\angle ADE) = \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{e} \tag{20}$$

$$\cos(\angle ADE) = \frac{a + b\cos(\alpha)}{e} \tag{21}$$

Berechnung des Sinus und Kosinus des Winkels $\angle EAD$:

$$\angle EAD \underbrace{=}_{\text{Ähnlichkeit}} \angle AC_1C_2$$

$$\sin(\angle AC_1C_2) \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{c} \tag{22}$$

$$b^2 \underbrace{=}_{\text{Kosinussatz}} a^2 + c^2 - 2ac\cos(\angle AC_1C_2)$$

$$\begin{aligned}\cos(\angle AC_1C_2) &= \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} = \frac{b^2 - a^2 - (a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha))}{-2ac} \\ &= \frac{-2a^2 + 2ab\cos(\alpha)}{-2ac} = \frac{a - b\cos(\alpha)}{c}\end{aligned} \tag{23}$$

Berechnung der Strecke $\overline{AE}$:

$$\frac{\overline{AE}}{\sin(\angle ADE)} \underbrace{=}_{\text{Sinussatz}} \frac{\overline{AD}}{\sin(180° - \angle ADE - \angle EAD)} = \frac{\overline{AD}}{\sin(\angle ADE + \angle EAD)}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\overline{AE}} &= \frac{\sin(\angle ADE + \angle EAD)}{\overline{AD} \cdot \sin(\angle ADE)} \\ &\underbrace{=}_{\substack{\text{Sinus-Additionstheorm,} \\ \text{Gl. 17 (S. 12), Gl. 20 (S. 14)}}} \frac{\sin(\angle ADE)\cos(\angle EAD) + \cos(\angle ADE)\sin(\angle EAD)}{\frac{ab}{c} \cdot \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{e}} \\ &\underbrace{=}_{\text{Gl. 20 - 23 (S.14)}} \frac{ce}{ab^2\sin(\alpha)}\left(\frac{b \cdot \sin(\alpha)}{e} \cdot \frac{a - b\cos(\alpha)}{c} + \frac{a + b\cos(\alpha)}{e} \cdot \frac{b \cdot \sin(\alpha)}{c}\right) \\ &= \frac{1}{ab^2\sin(\alpha)}\left((b \cdot \sin(\alpha)) \cdot (a - b\cos(\alpha)) + (a + b\cos(\alpha)) \cdot (b \cdot \sin(\alpha))\right) \\ &= \frac{1}{ab}\left(a - b\cos(\alpha) + a + b\cos(\alpha)\right) = \frac{2a}{ab} = \frac{2}{b} \\ \overline{AE} &= \frac{b}{2}\end{aligned}$$

Da $\overline{BD}$ $\overline{AC_2}$ zwischen A und C_2 schneidet und die Seite C_2 die Länge b hat, halbiert $\overline{BD}$ $\overline{AC_2}$. Weil sich mit a, b und α alle gültigen Konfigurationen im Sinne der Aufgabe darstellen lassen, ist bewiesen, dass die Gerade $\overline{BD}$ die Strecke $\overline{AC_2}$ immer halbiert.

Hilfssatz 2 (Pellsche Gleichung)

Sei D eine gegebene positive ganze Zahl und sei $(x_0; y_0)$ mit $x_0, y_0 > 0$ eine gegebene ganzzahlige Lösung der Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1.$$

Dann hat diese Gleichung unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x_i, y_i), wobei $x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ und $y_0 < y_1 < y_2 \cdots$ gilt.

Beweis:

Man kann eine rekursive Folge von $(x_i; y_i)$ wie folgt definieren:

$$\begin{aligned}(x_0; y_0) &= (x_0; y_0) \\ (x_i; y_i) &= (x_0 \cdot x_{i-1} + Dy_0 \cdot y_{i-1}; y_0 \cdot x_{i-1} + x_0 \cdot y_{i-1}) \text{ für } i > 0\end{aligned}$$

Das $(x_i; y_i)$ die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ löst, lässt sich per Induktion zeigen:

Induktionsanfang:

Die Aussage gilt für n = 0, da $(x_0; x_0)$ nach Voraussetzung die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$ löst.

Induktionsannahme:

$(x_n; y_n)$ löst die Gleichung $x^2 - Dy^2 = 1$.

Induktionschluss:

$$\begin{aligned}(x_{n+1}; y_{n+1}) &= (x_0 \cdot x_n + Dy_0 \cdot y_n; y_0 \cdot x_n + x_0 \cdot y_n) \\ x_{n+1}^2 - Dy_{n+1}^2 &= (x_0 \cdot x_n + Dy_0 \cdot y_n)^2 - D(y_0 \cdot x_n + x_0 \cdot y_n)^2 \\ &= x_0^2 \cdot x_n^2 + D^2 y_0^2 \cdot y_n^2 + 2Dx_0 y_0 \cdot x_n y_n - D(y_0^2 \cdot x_n^2 + x_0^2 \cdot y_n^2 + 2x_0 y_0 \cdot x_n y_n) \\ &= (x_0^2 - Dy_0^2) \cdot x_n^2 + (D^2 y_0^2 - Dx_0^2) \cdot y_n^2 = (x_0^2 - Dy_0^2) \cdot x_n^2 - D(x_0^2 - Dy_0^2) \cdot y_n^2 \\ &\underbrace{=}_{x_0^2 - Dy_0^2 = 1} x_n^2 - Dy_n^2 \underbrace{=}_{\text{Induktionsannahme}} 1\end{aligned}$$

Daher löst jedes Folgenglied der Folge $(x_n; y_n)$ die Gleichung $x^2 - Dy^2$. Dabei sind alle x_n und y_n ganzzahlig, da bei ihrer Berechnung nach Voraussetzung nur ganze Zahlen benutzt werden und nur die Operationen Addition und Multiplikation zu ihrer Verknüpfung verwendet werden. Da nach Voraussetzung x_0, y_0 und D positiv sind, folgt aus der Rekursionsformel, dass $x_n < x_{n+1}$ und $y_n < y_{n+1}$, also $x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ und $y_0 < y_1 < y_2 \cdots$ gilt. □

Hilfssatz 3 (verallgemeinerte Pellsche Gleichung)

Seien D und c gegebene positive ganze Zahlen und sei $(s;t)$ mit $s,t > 0$ eine gegebene ganzzahlige Lösungen der verallgemeinerten Pellschen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = c.$$

Habe man dazu noch eine Lösung (p,q) der Pellschen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

dann hat die verallgemeinerte Pellsche Gleichung unendlich viele ganzzahlige Lösungen (x_i, y_i), wobei $s < x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ und $t < y_0 < y_1 < y_2 \cdots$ gilt.

Beweis:

Da $(p;q)$ eine Lösung der Pellschen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

ist, gibt es nach *Hilfssatz 2* unendlich viele Lösungen $(p_i;q_i)$, die diese Pellsche Gleichung lösen.
Sei $(s;t)$ die gegebene Lösung der verallgemeinerten Pellschen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = c$$

und sei $(p_i;q_i)$ eine Lösung der Pellschen Gleichung

$$x^2 - Dy^2 = 1,$$

dann ist

$$(x_i;y_i) = (p_i \cdot s + Dq_i \cdot t; q_i \cdot s + p_i \cdot t)$$

auch eine Lösung der verallgemeinerten Pellschen Gleichung, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
x_i^2 - Dy_i^2 &= (p_i \cdot s + Dq_i \cdot t)^2 - D(q_i \cdot s + p_i \cdot t)^2 \\
&= p_i^2 \cdot s^2 + D^2 q_i^2 \cdot t^2 + 2Dp_iq_i \cdot st - D(q_i^2 \cdot s^2 + p_i^2 \cdot t^2 + 2p_iq_i \cdot st) \\
&= (p_i^2 - Dq_i^2) \cdot s^2 + (D^2 q_i^2 - Dp_i^2) \cdot t^2 = (p_i^2 - Dq_i^2) \cdot s^2 - D(p_i^2 - Dq_i^2) \cdot t^2 \\
&\underbrace{=}_{p_i^2 - Dq_i^2 = 1} s^2 - Dt^2 = c
\end{aligned}$$

Dabei sind alle x_n und y_n ganzzahlig, da bei ihrer Berechnung nach Voraussetzung und nach *Hilfssatz 2* nur ganze Zahlen benutzt werden und nur die Operationen Addition und Multiplikation zu ihrer Verknüpfung verwendet werden.
Da bei der Berechnung von $(x_i;y_i)$ alle Zahlen nach Voraussetzung und nach *Hilfssatz 2* positiv sind und nach *Hilfssatz 2* $p_i < p_{i+1}$ und $q_i < q_{i+1}$ gilt, folgt aus der Formel zur Berechnung von $(x_i;y_i)$, dass $x_i < x_{i+1}$ und $y_i < y_{i+1}$, also $x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ und $y_0 < y_1 < y_2 \cdots$ gilt. Aus dieser Formel folgt auch, dass $s < x_0$ und $t < y_0$, d.h. $s < x_0 < x_1 < x_2 \cdots$ und $t < y_0 < y_1 < y_2 \cdots$ gilt. □

Aufgabe 4

Da $\sqrt{x^2+y^3}$ und $\sqrt{x^3+y^2}$ positiv rational sein sollen, gibt es zwei positive rationale Zahlen p, q, sodass

$$\sqrt{x^2+y^3} = p \tag{24a}$$
$$\text{und } \sqrt{x^3+y^2} = q \tag{24b}$$

gilt. Man kann dies umformen:

$$x^2+y^3 = p^2 \tag{25a}$$
$$x^3+y^2 = q^2 \tag{25b}$$

Da x eine positiv rationale Zahl ist, kann man positive rationale Zahlen t,r,s finden, sodass

$$\begin{aligned} &y = tx \text{ (es muss } t \neq 1 \text{ gelten, damit } x \neq y \text{ gilt)} \\ &p = rx \\ &q = sx \end{aligned}$$

gilt. Wenn t, r, s rational sind, folgt daraus auch umgekehrt auch, dass y, p und q rational sind, daher hat man, wenn man eine Lösung in positiven rationalen Zahlen des Systems

$$\begin{aligned} x^2+(tx)^3 &= (rx)^2 \\ x^3+(tx)^2 &= (sx)^2 \\ \text{oder vereinfacht} & \\ 1+t^3x &= r^2 \\ x+t^2 &= s^2 \end{aligned}$$

hat, auch eine Lösung in positiven rationalen Zahlen des ursprünglichen Systems (25). Dabei sind unterschiedliche Lösungen dieses Systems auch unterschiedliche des ursprünglichen Systems (25) und umgekehrt.
Löst man dieses System nach x auf:

$$x = \frac{r^2-1}{t^3} \tag{26a}$$
$$x = s^2-t^2 \tag{26b}$$

Man sieht, dass alle Lösungen in positiven rationalen Zahlen der Gleichung

$$\frac{r^2-1}{t^3} = s^2-t^2 \tag{27}$$

mit $r > 1$ auch Lösungen des Systems 26 sind, da x aufgrund der Rationalität von t, r und s rational und wegen $x = (r^2-1)/t^3 = (r-1)(r+1)/t^3 > 0$ auch positiv ist.
Die Gleichung 27 lässt sich so umformen:

$$\begin{aligned} \frac{r^2-1}{t^3} &= s^2-t^2 \\ \Leftrightarrow r^2-1 &= s^2t^3-t^5 \\ \Leftrightarrow t^5-1 &= s^2t^3-r^2 \\ \Leftrightarrow t(t^5-1) &= (st^2)^2-tr^2 \end{aligned}$$

Setzt man nun

$$\begin{aligned} a &= st^2, \\ b &= r, \\ c &= t(t^5 - 1) \\ \text{und } D &= t, \end{aligned}$$

dann hat man eine verallgemeinerte Pellsche Gleichung:

$$a^2 - Db^2 = c$$

Zur Reduzierung der Freiheitsgrade kann man nun $t = 2 \neq 1$ setzen und sich darauf beschränken, nur ganzzahlige $(a; b)$ zu suchen. Damit erhält man die verallgemeinerte Pellsche Gleichung:

$$a^2 - 2b^2 = 62$$

Eine Lösung der verallgemeinerten Pellschen Gleichung ist $(a; b) = (28; 19)$ (durch suchen gewonnen: $28^2 - 2 \cdot 19^2 = 784 - 2 \cdot 361 = 62$) und eine der dazugehörigen Pellschen Gleichung $f^2 - 2g^2 = 1$ ist $(f; g) = (3; 2)$ (auch durch suchen gewonnen: $3^2 - 2 \cdot 2^2 = 9 - 2 \cdot 4 = 1$). Wegen *Hilfssatz 3* gibt es daher unendlich viele unterschiedliche ganzzahlige Lösungen $(u; v)$ der verallgemeinerten Pellschen Gleichung. Da diese Lösungen größer als $(28; 19)$ sind, gilt $v > 19 > 1$ für alle Lösungen $(u; v)$. Damit lässt sich allen $(u; v)$ eine Lösung $(x = (v^2 - 1)/8; t = 2; s = u/4; r = v)$ des Systems 26 zuordnen. Da unterschiedliche Lösungen $(u; v)$ auch unterschieldiche Lösungen $(x = (v^2 - 1)/8; t = 2; s = u/4; r = v)$ des Systems 26 zugeordnet werden, hat das System 26 auch unendlich viele Lösungen. Daraus folgt direkt, dass System 25 auch unendlich viele Lösungen hat, da alle Schritte eindeutig umkehrbar sind und deswegen unterschiedliche Lösungen des einen Systems auch im anderen System unterschiedlich sind. Also gibt es unendlich viele $(x; y) = ((v^2 - 1)/8; (v^2 - 1)/4)$, die das System 25 erfüllen und da das System 25 äquivalent zum System 24 ist, gibt es unendlich viele Paare $(x; y)$ im Sinne der Aufgabenstellung.