Lösungen zum
Bundeswettbwerb Mathematik 2005
Runde 1

von Yasin Zähringer

27. Februar 2005

1 Lösung zur Aufgabe 1

1.1 Vorbemerkungen:

Die Position des Würfels auf dem Schachbrett wird durch den Vektor

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ mit } x, y \in [1, 2005] \subset \mathbb{N}$$

eindeutig bestimmt, wobei $(1, 1)$ unten links auf dem Schachbrett liegt.

Da man die obenliegende Seite des Würfels vorgeben kann und auf einem Würfel nur Zahlen zwischen 1 und 6 sind, kann man den Betrag der Verschiebung in x-Richtung $|\triangle x|$ in den Grenzen 1 bis 6 vorgeben. Auch $|\triangle y|$ liegt in den Grenzen 1 bis 6, es gilt aber dieser Zusammenhang mit $|\triangle x|$: Die Summe der Zahlen zweier gegenüberliegender Seiten ist 7, daher gilt $|\triangle x| + |\triangle y| = 7$.

Also gilt für den Verschiebungsvektor eines Zuges entsprechend der Aufgabe

$$\begin{pmatrix} \triangle x \\ \triangle y \end{pmatrix} : \triangle x, \triangle y \in [-6, -1] \cup [1, 6] \text{ mit: } |\triangle x| + |\triangle y| = 7$$

Dabei repräsentiert der Verschiebungsvektor $(\triangle x|\triangle y)$ genau dann einen Zug vom Feld $(x|y)$, wenn $1 \leq x + \triangle x \leq 2005$ und $1 \leq y + \triangle y \leq 2005$ gilt.

1.2 Behauptung:

Man kann vom Feld $(1003, 1003)$ aus jedes Feld in endlich vielen Zügen erreichen.

1.3 Beweis:

Ein Elementarzug sei wie folgt aufgebaut: (dabei wird angenommen, alle Zwischenzüge sind zulässig, d.h. es ist hinreichend, dass $1 + 6 \leq x, y \leq 2005 - 6$ für $(x|y)$ gilt)

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix}$$

Führt man diese beide Züge drei Mal hintereinander aus:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 3\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x+6 \\ y \end{pmatrix}$$

Und danach diesen:

$$\begin{pmatrix} x+6 \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Dann hat man das Feld über dem Ausgangsfeld erreicht. Da mit dem Zug $(\triangle x|\triangle y)$ auch die Züge $(\pm\triangle x|\pm\triangle y)$ und $(\pm\triangle y|\pm\triangle x)$ möglich sind (wenn $1+6 \leq x, y \leq 2005-6$ gilt), kann man das Feld über, unter, rechts und links vom Ausgangsfeld erreichen. Dies seien nun gerade die Elementarzüge.

Es ist offentsichtlich, dass man vom Feld $(1003, 1003)$ alle Felder (x, y) mit $1 + 6 \leq x, y \leq 2005 - 6$ mittels Elementarzügen erreichen kann, z.B. erst in x-Richtung und dann in y-Richtung des zu erreichenden Feldes gehen.

Felder $(x|y)$, für die genau eine der Ungleichungen $1+6 \leq x \leq 2005-6$ und $1+6 \leq y \leq 2005-6$ nicht gilt, sind auch erreichbar. Man kann o.B.d.A. annehmen, dass $1 \leq x < 7$ gilt. Dann ist eines der Felder $(x|y)+(6|\pm 1) = (x+6|y\pm 1)$ mit Elementarschritten erreichbar, da $1+6 \leq x+6 \leq 2005-6$ und $1 + 6 \leq y + 1 \leq 2005 - 6$ oder $1 + 6 \leq y - 1 \leq 2005 - 6$ gilt. Da jeder Zug umkehrbar ist, kann man das Feld $(x|y)$ auch erreichen. Die anderen drei Fälle gehen analog.

Auch sind die Felder $(x|y)$ erreichbar, für die beide Ungleichungen $1 + 6 \leq x \leq 2005 - 6$ und $1 + 6 \leq y \leq 2005 - 6$ nicht gelten. Man kann o.B.d.A. annehmen, dass $1 \leq x < 7$ und $1 \leq y < 7$ gilt. Dann ist das Feld $(x|y) + (6|1) = (x + 6|y + 1)$ wie oben gezeigt wurde, erreichbar, da $1 + 6 \leq x + 6 \leq 2005 - 6$ und $y + 1 \leq 1 + 6$ oder $1 + 6 \leq y + 1 \leq 2005 - 6$ gilt. Da jeder Zug umkehrbar ist, ist das Feld $(x|y)$ auch erreichbar. Die anderen drei Fälle gehen analog.

Daher kann man jedes Feld in endlich vielen Schritten erreichen. $\square$

2 Lösung zur Aufgabe 2

Nach Voraussetzung hat a die Eigenschaft, dass es ganze Zahlen x und y gibt, mit $3a = x^2 + 2y^2$. Damit ist $x^2 + 2y^2$ durch 3 teilbar und damit auch $x^2 + 2y^2 - 3y^2 = x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$. Da 3 eine Primzahl ist, muss mindestens einer der Faktoren durch 3 teilbar sein.

Fall 1: $x - y$ ist durch 3 teilbar
Da $x - y$ durch 3 teilbar ist, ist auch $x - y + 3y = x + 2y$ durch 3 teilbar. Daher sind

$$\begin{aligned} u &= \frac{x+2y}{3} \\ \text{und } v &= \frac{x-y}{3} \end{aligned}$$

immer ganze Zahlen.
Es gilt $a = u^2 + 2v^2$:

$$\begin{aligned} u^2 + 2v^2 &= \frac{(x+2y)^2}{9} + 2\frac{(x-y)^2}{9} = \frac{x^2 + 4xy + 4y^2 + 2(x^2 - 2xy + y^2)}{9} \\ &= \frac{3x^2 + 6y^2}{9} = \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \frac{3a}{3} = a \end{aligned}$$

Fall 2: $x + y$ ist durch 3 teilbar
Da $x + y$ durch 3 teilbar ist, ist auch $x + y - 3y = x - 2y$ durch 3 teilbar. Daher sind

$$\begin{aligned} u &= \frac{x-2y}{3} \\ \text{und } v &= \frac{x+y}{3} \end{aligned}$$

immer ganze Zahlen.
Es gilt $a = u^2 + 2v^2$:

$$\begin{aligned} u^2 + 2v^2 &= \frac{(x-2y)^2}{9} + 2\frac{(x+y)^2}{9} = \frac{x^2 - 4xy + 4y^2 + 2(x^2 + 2xy + y^2)}{9} \\ &= \frac{3x^2 + 6y^2}{9} = \frac{x^2 + 2y^2}{3} = \frac{3a}{3} = a \end{aligned}$$

Daher lässen sich immer wenn es zwei ganze Zahlen x, y gibt mit $3a = x^2 + 2y^2$, zwei ganze Zahlen u, v konstruieren mit $a = u^2 + 2v^2$. (Wenn $x - y$ und $x + y$ durch 3 teilbar sind, kann man sich eines der beiden Zahlenpaare aussuchen.)

3 Lösung zur Aufgabe 3

Man kann annehmen, dass $\triangle ABC$ ein nicht-entartetes Dreieck ist, daher ist keine der Längen a, b oder c sowie kein Winkel α, β oder γ gleich Null.
Es gilt nach Voraussetzung:

$$\begin{aligned} 3\alpha + 2\beta &= 180^\circ && (1)\\ \text{und } \alpha + \beta + \gamma &= 180^\circ && (2)\\ \Rightarrow (1) - 2(2) : \alpha - 2\gamma &= -180^\circ \Leftrightarrow \alpha = 2\gamma - 180^\circ && (3)\\ \Rightarrow (1) - 3(2) : -\beta - 3\gamma &= -360^\circ \Leftrightarrow \beta = 360^\circ - 3\gamma && (4) \end{aligned}$$

Die zu beweisende Aussage lässt sich wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} a^2 + bc &= c^2\\ \Leftrightarrow \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} &= 1 \text{ (es gilt } c > 0) && (5) \end{aligned}$$

Da beide Formulierungen äquivalent sind, genügt es, Gleichung 5 zu beweisen.

Aus dem Sinussatz folgt: ($\sin\gamma \neq 0$, weil kein Winkel verschwindet)

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}\\ \text{sowie } \frac{b}{c} &= \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} \end{aligned}$$

Setzt man nun in diese Gleichung Gleichung 3 und 4 ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} &= \frac{\sin(2\gamma - 180^\circ)}{\sin\gamma} = -\frac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma}\\ \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} &= \frac{\sin(360^\circ - 3\gamma)}{\sin\gamma} = -\frac{\sin 3\gamma}{\sin\gamma} \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Formeln

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha\\ \sin 3\alpha &= 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha \end{aligned}$$

die im Unterabschnitt "Formeln für $\sin 2\alpha$ und $\sin 3\alpha$" bewiesen werden, ergibt sich desweiteren:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 2\gamma}{\sin\gamma} &= \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{\sin\gamma} = 2\cos\gamma\\ \frac{\sin 3\gamma}{\sin\gamma} &= \frac{3\sin\gamma\cos^2\gamma - \sin^3\gamma}{\sin\gamma} = 3\cos^2\gamma - \sin^2\gamma = 3\cos^2\gamma - (1 - \cos^2\gamma) = 4\cos^2\gamma - 1 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{a}{c} &= -2\cos\gamma\\ \frac{b}{c} &= 1 - 4\cos^2\gamma \end{aligned}$$

Dies in die linken Seite von Gleichung 5 eingesetzt:

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \frac{b}{c} = (-2\cos\gamma)^2 + 1 - 4\cos^2\gamma = 4\cos^2\gamma + 1 - 4\cos^2\gamma = 1$$

Daher ist Gleichung 5 bewiesen und deswegen gilt $a^2 + bc = c^2$.

Formeln für $\sin 2\alpha$ und $\sin 3\alpha$

Aus der Schule ist bekannt:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Mit $\beta := \alpha$ folgt:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

Außerdem ist aus der Schule bekannt:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\beta := \alpha \Rightarrow \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(\alpha + 2\alpha) = \sin\alpha\cos 2\alpha + \cos\alpha\sin 2\alpha = \sin\alpha(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + \cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)\\ &= \sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha + 2\sin\alpha\cos^2\alpha = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha\end{aligned}$$

Eine einfachere, alternative Herleitung geht über die eulerische Formel:

$$\begin{aligned}\sin 2x &= \Im(\exp(2ix)) = \Im(\exp(ix)^2) = \Im\left((\cos x + i\sin x)^2\right) = \Im\left(\cos^2 x + 2i\cos x\sin x - \sin^2 x\right)\\ &= 2\cos x\sin x\\ \sin 3x &= \Im(\exp(3ix)) = \Im(\exp(ix)^3) = \Im\left((\cos x + i\sin x)^3\right)\\ &= \Im\left(\cos^3 x + 3i\cos^2 x\sin x - 3\cos x\sin^2 x - i\sin^3 x\right) = 3\cos^2 x\sin x - \sin^3 x\end{aligned}$$

Wobei $\Im(z)$ der Imaginärteil von z, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Expotentialfunktion und i die imaginäre Einheit ist. (Leider mangelt es dieser Herleitung an der Nutzung von Schulmitteln)

4 Lösung zur Aufgabe 4

4.1 Definitionen:

***natürliche Zahlen*:** Alle ganzen Zahlen größer oder gleich eins. Abkürzung: $\mathbb{N}$

***natürliche Zahlen mit* 0:** Abkürzung: $\mathbb{N}_0$

***Intervall* $[n, m]$ *mit* $n, m \in \mathbb{N}$:** $[n, m]$ ist die Menge aller natürlichen Zahlen zwischen n und m inklusive.

***Liste*:** Eine Liste ist eine Folge $(L_n)_{n\in I}$ von ganzen Zahlen, wobei die Indexmenge I endlich ist und aus $L_i = L_j$ $i = j$ folgt, d.h. keine zwei Elemente gleich sind.

***gültige* Liste:** Eine gültige Liste ist eine Liste, mit der Eigenschaft, dass für je zwei Elemente ihr arithmetisches Mittel nicht zwischen ihnen steht.

***Wertemenge* einer Liste:** Die Wertemenge einer Liste enthält genau alle Elemente der Liste.

$|L|$, wobei L eine Liste ist: $|L|$ ist die Anzahl der Elemente von L.

nL, wobei $n \in \mathbb{N}$ gilt und L eine Liste ist: nL ist die Liste, die entsteht, wenn man jedes Element aus L mit n multipliziert und dabei die Reihenfolge von L beibehält. Es gilt also $(nL)_i = n \cdot L_i$.

$L+g$, wobei $g \in \mathbb{Z}$ gilt und L eine Liste ist: $L+g$ ist die Liste, die entsteht, wenn man zu jedem Element aus L g addiert und dabei die Reihenfolge von L beibehält. Es gilt also $(L + g)_i = L_i + g$.

$A \oplus B$, wobei A und B Listen sind: $A \oplus B$ ist die Liste, die entsteht, wenn man an die Liste A die Elemente von B hängt unter bei Beibehaltung der Reihenfolgen von A und B. Es gilt also für $1 \leq i \leq |A|$ ist $(A \oplus B)_i = A_i$ und für $|A| + 1 \leq i \leq |A| + |B|$ ist $(A \oplus B)_i = B_{i-|A|}$.

4.2 Behauptung:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ kann man eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, n]$ konstruieren.

4.3 Beweis:

Satz: Sei g eine ganze Zahl und L eine gültige Liste. Dann ist auch $L + g$ eine gültige Liste.
Beweis: Seien $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq |L| = |nL|$. Läge zwischen $(L + g)_i$ und $(L + g)_j$ das Element $((L + g)_i + (L + g)_j)/2$, dann müsste

$$\frac{(L+g)_i + (L+g)_j}{2} - g = \frac{L_i + L_j + 2g}{2} - g = \frac{L_i + L_j}{2}$$

zwischen L_i und L_j liegen. Da aber L eine gültige Liste ist, kann das nicht sein. Daher kann $((L + g)_i + (L + g)_j)/2$ nicht zwischen $(L + g)_i$ und $(L + g)_j$ liegen, d.h. $L + g$ ist eine gültige Liste. □

Satz: Sei n eine natürliche Zahl und L eine gültige Liste. Dann ist auch nL eine gültige Liste.
Beweis: Seien $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq |L| = |nL|$. Läge zwischen $(nL)_i$ und $(nL)_j$ das Element $((nL)_i + (nL)_j)/2$, dann müsste

$$\frac{1}{n} \cdot \frac{(nL)_i + (nL)_j}{2} = \frac{n \cdot L_i + n \cdot L_j}{2n} = \frac{L_i + L_j}{2}$$

zwischen L_i und L_j liegen. Da aber L eine gültige Liste ist, kann das nicht sein. Daher kann $((nL)_i + (nL)_j)/2$ nicht zwischen $(nL)_i$ und $(nL)_j$ liegen, d.h. nL ist eine gültige Liste. □

Daraus folgt, wenn L eine gültige Liste ist, dann sind auch $2L$ und $2L - 1$ gültige Listen.

Satz: Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ existiert eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, 2^n]$.
Beweis durch Induktion:

Induktionsanfang:

Die Aussage gilt für $n = 0$, da $L = (1), |L| = 1$ eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, 2^n] = [1, 1] = \{1\}$ ist.

Induktionsannahme:

Es existiert eine gültige Liste L mit der Wertemenge $[1, 2^{n-1}]$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschluss:

$M := (2L) \oplus (2L - 1)$ ist eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, 2^n]$: (Die Wertemengen von $2L$ und $2L - 1$ sind disjunkt, da die eine nur gerade, die andere nur ungerade Elemente enthält)

Beweis: Es ist offensichtlich, dass die Wertemenge von M gleich $[1, 2^n]$ ist. Seien $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq |M|$. Dann können zwei Fälle auftreten:
Fall 1: M_i und M_j sind beide aus $2L$ oder beide aus $2L - 1$:
Da L eine gültige Liste ist, sind auch $2L$ und $2L - 1$ gültige Listen. Aufgrund der Konstruktion von M liegt $(M_i + M_j)/2$ nicht zwischen den Elementen M_i und M_j.
Fall 2: M_i ist aus $2L$ und M_j aus $2L - 1$ oder umgekehrt:
Eine der beiden Zahlen ist gerade, die andere ungerade, daher ist die Summe $M_i + M_j$ ungerade, d.h. ihr arthmetisches Mittel ist nicht ganzzahlig. Daher liegt es nicht in M und erst recht nicht zwischen den Elementen M_i und M_j.

Daher ist M eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, 2^n]$. □

Es gibt also zu jedem $n \in \mathbb{N}_0$ eine gültige Liste mit der Wertemenge $[1, 2^n]$. □

Satz: Entfernt man aus einer gültigen Liste L Elemente, dann ist die entstehende Liste E auch gültig.
Beweis: Seien $i, j \in \mathbb{N}$ und $i, j \leq |L|$. Desweitern seien L_i und L_j Elemente der Wertemenge von E (wurden also nicht herausgenommen). Da L eine gültige Liste ist, liegt das arithmetische Mittel von L_i und L_j nicht zwischen den beiden Elementen. Da bei der Konstruktion von E die Liste L weder umsortiert noch neue Elemente hinzugefügt wurden, liegt das arithmetische Mittel von $E_u = L_i$ und $E_v = L_j$ nicht zwischen diesen beiden Elementen. Daher ist E eine gültige Liste. □

Eine mögliche gültige Liste mit der Wertemenge $[1, n]$ mit vorgebenen $n \in \mathbb{N}_0$ ist diese:

1. Man konstruiere eine gültige Liste mit dem Wertebereich $[1, 2^m]$ nach obigem Prinzip, wobei 2^m die kleinste Zweierpotenz größer oder gleich n ist ($\Rightarrow m = \lceil \log_2 n \rceil$, $\lceil \cdot \rceil$ ist eine Funktion die aufrundet: "ceil").

2. Man nehme diese Elemente heraus: $[1, 2^m] \setminus [1, n] = [n + 1, 2^m]$

Die daraus entstehende Liste ist gültig und hat den Wertebereich $[1, n]$, mit beliebigem $n \in \mathbb{N}_0$. Damit ist Behauptung bewiesen. □