Lösungen zum Bundeswettbewerb Mathematik 2005 Runde 2

von Yasin Zähringer

1. September 2005

Inhaltsverzeichnis

Verwendete Materialien:

- „Cinderella“ für die Zeichnungen in Aufgabe 3 und 4
- „Taschenbuch der Mathematik“ („Bronstein“) für Aufgabe 4

1 Lösung zu Aufgabe 1

$a \bmod b = c$: c ist der Rest, den a bei der Division durch b lässt. ($0 \leq c < b$)
Die Position des Spielsteins von Spieler A sei $(x_A|y_A)$ mit $0 \leq x_A, y_A \leq 99$, entsprechendes gilt für Spieler B. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt unten links auf dem Schachbrett, die x-Achse geht nach rechts, die y-Achse geht nach oben. Die Startpositionen ist dann für Spieler A $(0|0)$ und für Spieler B $(99|0)$.

1.1 Der Algorithmus

Der Algorithmus für Spieler A ist:

1. Wenn $|x_B - x_A| + |y_B - y_A| = 1$ gilt, gehe auf das Feld von Spieler B.
2. Wenn nicht $|y_B - y_A| \leq 1$ gilt, gehe in y-Richtung in Richtung von Spieler B.
3. Gehe nach rechts.

Dieser Algorithmus wird von oben nach unten abgearbeitet, d.h. wenn die Bedingung für 1. erfüllt ist, wird 1. ausgeführt, dann wird erst überprüft, ob 2. ausgeführt wird und wenn nicht, wird 3. ausgeführt.

1.2 Aussagen über den Algorithmus

Satz 1: Nachdem Spieler A gezogen hat, gilt immer $|y_B - y_A| \leq 1$.
Beweis: Am Spielanfang gilt dies offensichtlich. Wenn nun Spieler B einen Spielzug macht, der zum Verletzen dieser Ungleichung führt, wird der 2. Schritt des Algorithmus ausgeführt (der 1. nicht weil $|x_B - x_A| + |y_B - y_A| \geq |y_B - y_A| > 1$ gilt). Da Spieler B seinen Spielstein nur um ein Feld weitergezogen hat, wird dies von Spieler A wieder ausgeglichen, d.h. der Zustand $|y_B - y_A| \leq 1$ wird wieder hergestellt.

Satz 2: Nachdem Spieler A gezogen hat, gilt immer $x_A < x_B$ oder der Spielstein von Spieler A steht auf dem Feld des Spielsteins von Spieler B.
Beweis: In einem Spielzug kann sich die Differenz $x_A - x_B$ maximal um 2 ändern, da Spieler A und Spieler B ihren Spielstein nur um genau eine Position verschieben können. Wenn nun zu einem Zeitpunkt $x_A \geq x_B$ gelten soll, muss der Spielstein von Spieler B die Linie $x = x_A$ überquert haben oder darauf stehen, da für den Anfangszustand $x_A < x_B$ gilt. Daher muss in diesem Fall mindestens einmal $x_A = x_B$ oder $x_A + 1 = x_B$ gelten.
Am Anfang gilt $\big(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|\big) \bmod 2 = 99 \bmod 2 = 1$. Nachdem Spieler A gezogen hat, verändet sich der Ausdruck um $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ um ± 1. Da aber $-1 \bmod 2 = 1$ gilt, ergibt der Ausdruck $|x_B - x_A| + |y_B - y_A|$ modulo 2 dann den Wert 0. Analog erhält man den Wert 1 wieder, wenn Spieler B gezogen hat.
Untersucht man nun die möglichen relativen Positionen von Spielstein B zu A bevor Spieler A zieht und wenn $x_A = x_B$ oder $x_A + 1 = x_B$ gilt, dann stellt man fest, dass nicht alle Positionen möglich sind.
Man kann nämlich verwenden, dass $|y_B - y_A| \leq 1$ gilt, denn das Verletzen dieser Ungleichung führt dazu, dass der 2. Schritt des Algorithmus ausgeführt wird und damit die Ungleichung wieder erfüllt ist. Wenn die Ungleichung verletzt ist, gilt $x_A + 1 = x_B$, also nicht $x_A = x_B$, da die x-Koordiantendifferenz nur um 1 geändert wurde, da Spieler B sich in y-Richtung bewegt hat. Eine Bewegung nach rechts oder links von dieser Position aus führt zu $x_A + 2 = x_B$ bzw. zu $x_A = x_B$. (Bei beiden Fällen ist die Ungleichung dann erfüllt.) Der erste Fall ist irrelevant, der zweite führt, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden, zum Ende des Spiels. Zudem ist wichtig, dass das Verletzen der Ungleichung nur maximal 99 Mal möglich ist, da dann der Rand erreicht ist. (Dies wird in Satz 3 näher begründet.) Da $\big(|x_B - x_A| + |y_B - y_A|\big) \bmod 2 = 1$ gilt, sind dann nur noch die relativen Positionen $(x_B - x_A|y_B - y_A) = (1|0)$ oder $(0|\pm 1)$ möglich.
Dann gilt aber $|x_B - x_A| + |y_B - y_A| = 1$ und daher wird zwangsläufig beim Versuch von Spieler B die Linie $x = x_A$ zu überqueren der 1. Schritt des Algorithmus ausgelöst und damit der Stein „gefangen“, d.h. beide Spielsteine stehen auf der selben Position.

Satz 3: Spätestens nach 100 Schritten ist $x_{A,alt} < x_{A,neu}$ oder der Spielstein von Spieler A steht auf dem Feld des Spielsteins von Spieler B.

Beweis: Wenn Spieler B seinen Spielstein nach rechts oder links versetzt, führt dies automatisch dazu, dass der 3. Schritt des Algorithmus ausgeführt wird und damit gilt dann automatisch $x_{A,alt} < x_{A,neu}$. Daher muss man nur noch Verschiebungen nach oben und unten untersuchen. Wenn Spieler B die Bewegungsrichtung (nur oben und unten zugelassen) umkehrt, dann ist der Spielstein von B auf einem Feld für das die Ungleichung $|y_B - y_A| \leq 1$ immer noch gilt. Denn wenn zuvor von Spieler A nicht der 2. Schritt des Algorithmus ausgeführt wurde, ist es einsichtig, dass die y-Koordinaten diese Ungleichung erfüllen, denn der Spielstein von Spieler A hat seine y-Position nicht verändert und Spieler B geht mit seinem Spielstein auf seine alte Position zurück. Wenn von Spieler A der 2. Schritt des Algorithmus ausgeführt wurde, dann galt $y_B = y_A \pm 1$, $+1$ wenn die Bewegungsrichtung zuvor nach oben gerichtet war, -1 im anderen Fall. Da nun die Bewegungsrichtung umgekehrt wird, gilt nun $y_B = y_A$, erfüllt also trivialerweise $|y_B - y_A| \leq 1$.
Damit wird also bei keinem Wechsel der Bewegungsrichtung der 2. Schritt des Algorithmus ausgeführt, d.h. entweder 1. oder 3. wird ausgeführt. Wenn 1. ausgeführt wird, stehen beide auf der selben Position und das Spiel ist zu Ende. Die Alternative ist der 3. Schritt, d.h. $x_{A,alt} < x_{A,neu}$.
Da das Spielfeld nur 100 Felder pro Spalte bzw. Zeile hat, kann man nur maximal 99 Schritte in eine Richtung machen ohne einen Richtungswechsel vollziehen zu müssen, spätestens nach dem 100. Schritt ist also $x_{A,alt} < x_{A,neu}$ oder das Spiel ist zu Ende.

Satz 4: Der Spielstein von Spieler A steht nach endlich vielen Zügen auf dem Feld des Spielsteins des Spielers B, unabhängig von dessen Zügen.
Beweis: Satz 2 besagt, dass der Spielstein von Spieler B immer rechts von dem des Spielers A oder „gefangen“ ist. Satz 3 besagt, dass $x_A = 99$ nach einer endlichen Anzahl von Schritten erreicht oder „gefangen“ ist. Allerdings gibt es kein Feld rechts davon, d.h. beide Steine befinden sich nach endlich vielen Schritten auf dem selben Feld.

2 Lösung zu Aufgabe 2

Mit $\mathbb{N}$ ist hier die Menge der natürlichen Zahlen *ohne* die Null gemeint.
Da $a < 0$ ist, kann man $a = -|a|$ schreiben. Dies erweist sich später als sinnvoll.
Der Fall, dass a, b oder c identisch 0 sind, ist nicht möglich, da wenn $a = 0$ oder $c = 0$ gelten würde, müsste $b = \pm\sqrt{5} \in \mathbb{Z}$ gelten. Widerspruch! Aus $b = 0$ würde folgen, dass $ac = -\frac{5}{4}$ gelten müsste, was aber mit $a, c \in \mathbb{Z}$ nicht möglich ist.
$ggT(a, b)$ ist der größte gemeinsame Teiler von a und b.

2.1 Allgemeines zu quadratischen Funktionen

Der Scheitelpunkt der Parabel $f(z) = az^2 + bz + c$ ist:

$$\left(-\frac{b}{2a} \middle| -\frac{b^2 - 4ac}{4a} \right) = \left(\frac{b}{2|a|} \middle| \frac{5}{4|a|} \right)$$

Dabei wurde die Voraussetzung $b^2 - 4ac = 5$ benutzt. Da $a < 0$ gilt, ist die Parabel nach unten geöffnet und der Scheitelpunkt ist der höchste Punkt der Parabel.
Die Funktion ist nur im Bereich

$$-\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{5}}{2|a|} < x < -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b + \sqrt{5}}{2|a|}$$

positiv, weil $\frac{b \pm \sqrt{5}}{2|a|}$ die einzigen Nullstellen von $f(z)$ sind und weil wegen $a < 0$ die Parabel nach unten geöffnet ist.

Im Weiteren sei $x \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$. Der Fall $x = 0$ wird später seperat behandelt.

2.2 Schranken für $|a|$

Da x eine rationale Zahl ungleich 0 ist, kann man x *eindeutig* als $\frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ und $ggT(p, q) = 1$ darstellen, daher gilt:

$$f(x) = f\left(\frac{p}{q}\right) = a\left(\frac{p}{q}\right)^2 + b\left(\frac{p}{q}\right) + c = \frac{ap^2 + bpq + cq^2}{q^2}$$

Da im Zähler und im Nenner nur ganze Zahlen stehen, ist der kleinste positive Funktionswert q^{-2}.
Nun gilt aber, dass der höchste Punkt der Parabel der Scheitelpunkt S mit $S_y = \frac{5}{4|a|}$ ist. Wenn nun $f(x)$ für ein festes $x \in \mathbb{Q} \backslash \{0\}$ positiv ist, muss $S_y \geq q^{-2}$ gelten. Also:

$$\begin{aligned} S_y &\geq \frac{1}{q^2} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4|a|} &\geq \frac{1}{q^2} \\ \Leftrightarrow \frac{5}{4}q^2 &\geq |a| \end{aligned}$$

Nach unten ist $|a|$ trivialerweise durch 1 beschränkt, da $|a| \in \mathbb{N}$ gilt. Zusammenfassend gilt also:

$$1 \leq |a| \leq \frac{5}{4}q^2$$

2.3 Beschränkheit von b

Da $f(x)$ nur im Bereich

$$\frac{b - \sqrt{5}}{2|a|} < x < \frac{b + \sqrt{5}}{2|a|}$$

positiv ist, kann b nicht unbeschränkt wachsen, da sonst die linke Schranke verletzt wird, denn es gilt:

$$\frac{b-\sqrt{5}}{2|a|} < x \Leftrightarrow b < 2|a|x + \sqrt{5}$$

$$\begin{aligned}&\text{Fall 1: } 0 < x\\ &|a| \le \frac{5}{4}q^2 \Rightarrow b \le 2 \cdot \frac{5}{4}q^2 \cdot x + \sqrt{5} = \frac{5}{2}pq + \sqrt{5}\\ &\text{Fall 2: } x < 0\\ &1 \le |a| \Rightarrow b \le 2 \cdot 1 \cdot x + \sqrt{5} = 2x + \sqrt{5}\end{aligned}$$

b kann auch nicht unbeschränkt fallen, da sonst die rechte Schranke verletzt wird, denn es gilt:

$$x < \frac{b+\sqrt{5}}{2|a|} \Leftrightarrow 2|a|x - \sqrt{5} < b$$

$$\begin{aligned}&\text{Fall 1: } 0 < x\\ &1 \le |a| \Rightarrow b \ge 2 \cdot 1 \cdot x - \sqrt{5} = 2x - \sqrt{5}\\ &\text{Fall 2: } x < 0\\ &|a| \le \frac{5}{4}q^2 \Rightarrow b \ge 2 \cdot \frac{5}{4}q^2 \cdot x - \sqrt{5} = \frac{5}{2}pq - \sqrt{5}\end{aligned}$$

b ist also nach oben und nach unten beschränkt.

2.4 Sonderfall $x = 0$

Es gilt $f(0) = c$. Man sucht also alle möglichen Tripel mit $c > 0$. Es gilt $b^2 - 5 = 4ac$, da $a < 0$ ist, muss $b^2 < 5$ sein, damit $c > 0$ sein kann. Dies ist nur der Fall für $|b| \le 2$. Damit ist b auch hier beschränkt.

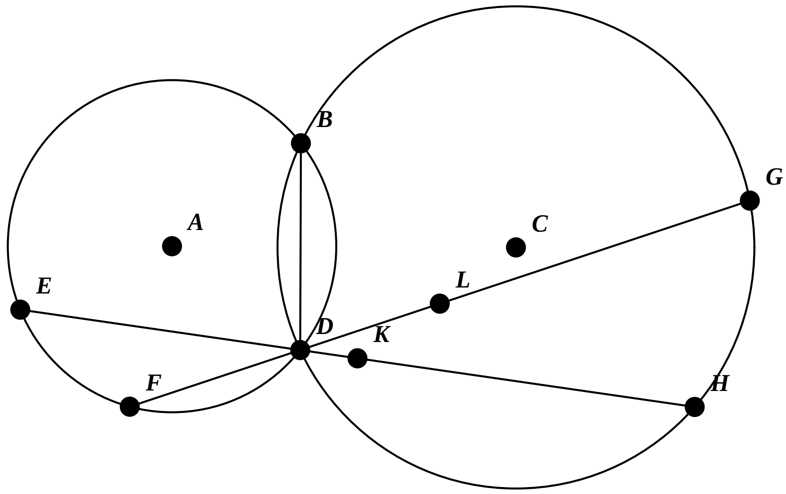
2.5 Beweis der Beschränkheit der Anzahl der günstigen Tripel

Aus $b^2 - 4ac = 5$ folgt, dass $ac = \frac{b^2-5}{4}$ gilt. Da a, b, c ganze Zahlen ($\neq 0$) sind, müssen a und c Teiler von $\frac{b^2-5}{4}$ ($\in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ für günstiges b) sein, davon gibt es aber nur endlich viele. Daher gibt es nur endlich viele mögliche Tripel (a, b, c) zu einem b.
Da aus den Schranken von b folgt, dass nur aus endlich vielen $b \in \mathbb{Z}$ Tripel gebildet werden können, die die Eigenschaften im Sinne der Aufgabe erfüllen, ist die Gesamtzahl der günstigen Tripel für jedes $x \in \mathbb{Q}$ auch endlich.

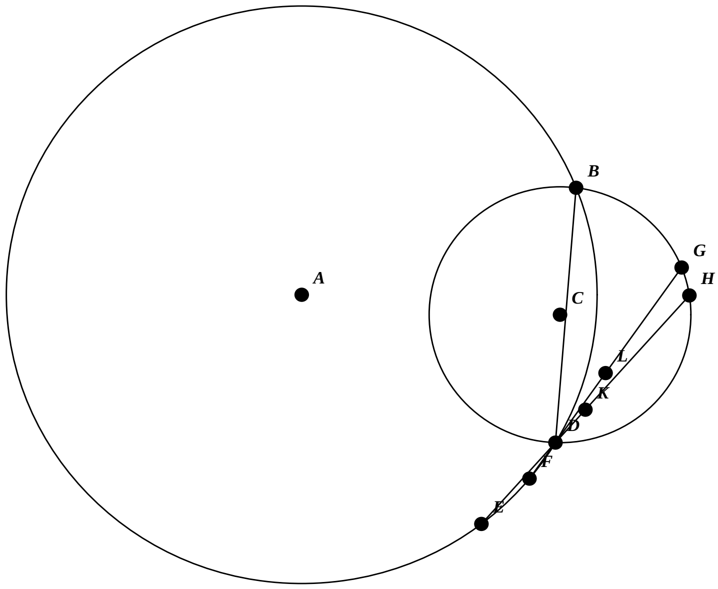
3 Lösung zu Aufgabe 3

3.1 Aufgabenstellung und Vorbemerkungen

Fall 1: A und C liegen auf unterschiedlichen Seiten von BD



Fall 2: A und C liegen auf der gleichen Seite von BD aus



Fall 3: A oder C liegt auf BD (kein Bild)
Um den Punkt A sei der Kreis k_1 mit dem Radius r_1, um den Punkt C der Kreis k_2 mit dem Radius r_2. Sie schneiden sich in den Punkten B und D. Man braucht hier die Fallunterscheidung, ob A und C auf der gleichen oder auf unterschiedlichen Seiten von BD liegen. Es gibt auch die Möglichkeit, dass A oder C auf BD liegt. Seien nun EH und FG Geraden die k_1 und k_2 in zwei Punkten schneiden und durch D gehen. Es wird laut Aufgabe vorausgesetzt, dass D zwischen E und H sowie zwischen F und G liegt.
Seien K und L die Mitten der Strecken EH bzw. FG. Dann soll nach Aufgabenstellung bewiesen werden, dass die Dreiecke $\triangle BFE$, $\triangle BGH$ und $\triangle BKL$ ähnlich sind.
O.B.d.A. sei $\angle EBD \geq \angle FBD$, denn durch Vertauschen der Bezeichnungen der Strecken EH und FG kann man dies immer erreichen.

3.2 Die Lage von E und F sowie G und H in bezug auf BD

Es gilt, dass E und F auf der selben Seite von BD liegen, allerdings unterscheidet sich die Argumentation für die einzelnen Fälle:

Fall 1: Wenn sie nicht auf der selben Seite von BD liegen (auf BD ist nicht möglich, da D zwischen E und H sowie zwischen F und G liegen soll), dann liegt ein Punkt P ($\in \{E, F\}$) „rechts“ (siehe Bild zu Fall 1) von BD. Allerdings schneidet dann die Gerade PD k_2 auch rechts von BD in Q ($\in \{G, H\}$). Dann kann aber D nicht zwischen P und Q liegen, was aber nach Voraussetzung gefordert wird.
Fall 2: O.B.d.A. sei k_1 größer als k_2. Wenn sie gleich groß und nicht deckungsgleich sind, dann liegen A und C auf verschiedenen Seiten von BD. Es muss analog zu Fall 1 ein Punkt P ($\in \{E, F\}$) „rechts“ (siehe Bild zu Fall 2) von BD liegen. Allerdings folgt daraus eine Verletzung der Forderung, dass D zwischen E und H sowie zwischen F und G liegt. Die Begründung läuft analog zu Fall 1.
Fall 3: Genau wie in Fall 2.

Da D zwischen E und H sowie zwischen F und G liegt, liegen G und H auf einer anderen Seite von BD wie E und F, insbesondere liegen G und H auf der selben Seite. Für die restliche Argumentation braucht man nicht mehr zwischen diesen drei Fällen unterscheiden.

3.3 Ähnlichkeit von $\triangle BEH$ und $\triangle BFG$

Nach dem Peripheriewinkel Satz sind die Winkel $\angle HEB$ und $\angle GFB$ im Kreis k_1 und $\angle BHE$ und $\angle BGF$ im Kreis k_2 identisch, da die Dreiecke $\triangle BED$ und $\triangle BFD$ im Kreis k_1 und $\triangle BHD$ und $\triangle BGD$ im Kreis k_2 über die Strecke BD errichtet wurden und auf der selben Seite in bezug auf diese Strecke liegen.
Damit sind zwei Winkel der Dreiecke $\triangle BEH$ und $\triangle BFG$ gleich, damit auch der dritte und somit sind die beiden Dreiecke ähnlich. Der Ähnlichkeitsfaktor sei $|EH|/|FG| = f$.
Aus der Ähnlichkeit folgt auch, dass die beiden Dreiecke $\triangle BEK$ und $\triangle BFL$ mit dem Ähnlichkeitsfaktor f ähnlich sind, da $|BE|$ und $|BF|$ sowie $|EK| = |EH|/2$ und $|FL| = |FG|/2$ im Verhältnis f stehen und die eingeschlossenen Winkel $\angle DEB$ und $\angle DFB$ identisch sind. Daraus folgt, dass auch die Seitenhalbierenden BK und BL des Dreiecks $\triangle BEH$ bzw. $\triangle BFG$ im Verhältnis f stehen und dass $\angle EBK = \angle FBL$ gilt.

3.4 Die Winkel $\angle EBF$, $\angle HBG$ und $\angle KBL$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\angle EBF = \angle EBD - \angle FBD \\
&\angle EDF = \angle BDF - \angle BDE = \underbrace{(\pi - \angle DFB - \angle FBD)}_{\text{Innenwinkelsumme von } \triangle DFB} - \underbrace{(\pi - \angle DEB - \angle EBD)}_{\text{Innenwinkelsumme von } \triangle DEB} \\
&\underbrace{=}_{\angle DEB = \angle DFB} \angle EBD - \angle FBD = \angle EBF
\end{aligned}$$

Analog erhät man $\angle HBG = \angle HDG$. Da aber $\angle EDF$ und $\angle HDG$ Scheitelwinkel sind, sind sie identisch und damit gilt auch $\angle EBF = \angle HBG$.
Zusätzlich gilt:

$$\angle KBL = \begin{cases} \angle DBL - \angle DBK = (\angle FBL - \angle FBD) - (\angle EBK - \angle EBD) & (L,\ K \text{ rechts von } BD) \\ \angle DBL + \angle KBD = (\angle FBL - \angle FBD) + (\angle EBD - \angle EBK) & (L \text{ rechts, } K \text{ links}) \\ \angle KBD - \angle LBD = (\angle EBD - \angle EBK) - (\angle FBD - \angle FBL) & (L,\ K \text{ links}) \end{cases}$$

$$\underbrace{=}_{\angle EBK = \angle FBL} \angle EBD - \angle FBD = \angle EBF = \angle HBG$$

Der Fall, dass L links und K rechts von BD liegt, tritt nicht auf, da $\angle EBD \geq \angle FBD$ gilt. Wenn L oder K auf BD liegen, ist es nicht relevant, ob man ihn als links bzw. rechts von BD liegend auffasst, da in diesem Fall $\angle DBL$ bzw. $\angle DBK$ identisch 0 ist und damit das Vorzeichen irrelevant wird.

3.5 Ähnlichkeit von $\triangle BFE$, $\triangle BGH$ und $\triangle BKL$

Die Dreiecke $\triangle BFE$ und $\triangle BGH$ sind ähnlich, da zwei entsprechende Seiten, BE und BH sowie BF ($|BF| = f \cdot |BE|$) und BG ($|BG| = f \cdot |BH|$) im Verhältnis $|BE|/|BH|$ stehen und der eingeschlossene Winkel identisch ist.
Die Dreiecke $\triangle BFE$ und $\triangle BKL$ sind ähnlich, da zwei entsprechende Seiten, BE und BK sowie BF ($|BF| = f \cdot |BE|$) und BL ($|BL| = f \cdot |BK|$) im Verhältnis $|BE|/|BK|$ stehen und der eingeschlossene Winkel identisch ist.
Daraus folgt, dass die drei Dreiecke $\triangle BFE$, $\triangle BGH$ und $\triangle BKL$ zueinander ähnlich sind.

4 Lösung zu Aufgabe 4

Es ist offensichtlich, dass bei einem geschlossenem Streckenzug die Anzahl der Ecken gleich der Anzahl der Kanten ist.
$a \bmod b = c$: c ist der Rest, den a bei der Division durch b lässt. $(0 \leq c < b)$
(Kreis-)Sektoren im Sinne von „Taschenbuch der Mathematik“ („Bronstein“): 3.1.6.2

4.1 Lösung zu Teilaufgabe a)

Es wird im Weiteren vorausgesetzt, dass n ungerade und größer 1 ist.

4.1.1 Obergrenze für $A(n)$

Betrachte man einen geschlossenen Streckenzug mit n Kanten. Jede Kante kann sich mit jeder weiteren Kante schneiden mit Ausnahme sich selbst und den zwei unterschiedlichen Kanten an ihren beiden Enden. Daher kann sich jede Kante mit maximal $n-3$ anderen Kanten schneiden. Damit ergeben sich $n(n-3)$ Überschneidungen, wobei jede doppelt gezählt wurde, wenn man annimmt, dass in einem Schnittpunkt sich die minimale Anzahl von Kanten schneiden, nämlich zwei. Daher ist:

$$A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2}$$

4.1.2 Untergrenze für $A(n)$

Dies ist eine Konstruktionsbeschreibung für einen geschlossenen Streckenzug mit genau $n(n-3)/2$ Selbstüberschneidungen bei genau n Ecken:

Konstruktionsalgorithmus: Man nehme den Einheitskreis und nummeriere die n-ten Einheitswurzeln $((\cos(\frac{i}{n}\pi)|\sin(\frac{i}{n}\pi)$ mit $i \in \mathbb{Z} \wedge 0 \leq i < n$) von 0 bis $n-1$ im Gegenuhrzeigersinn.
Man wähle nun den Punkt 0 als P_0 aus, setze $i := 0$ und führe folgende Schritte aus:

1. Wähle die $\left((i+1)\frac{n-1}{2}\right)$ mod n-te Einheitswurzel als P_{i+1}.
2. Man ziehe von P_i aus eine Kante zu P_{i+1}.
3. Erhöhe i um 1.
4. Wenn P_i 0 ist, beende den Algorithmus.
5. Gehe zu 1..

Aussagen über den Konstruktionsalgorithmus: (Da n und $n-1$ teilerfremd sind $(n \geq 3)$, sind auch n und $(n-1)/2$ teilerfremd.)

Satz 1: Der Algorithmus terminiert spätestens bei $i = n$.
Beweis: Es gilt: $P_i = \big(i(n-1)/2\big) \bmod n$. Da $P_n = 0$ gilt, terminiert der Algorithmus spätestens bei $i = n$.

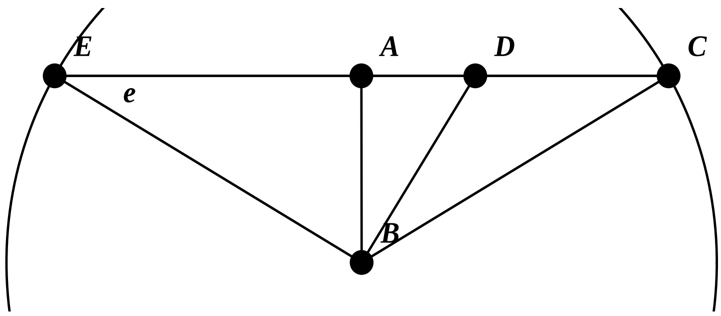
Satz 2: Der Algorithmus terminiert nicht vor $i = n$.
Beweis: Würde der Algorithmus vorher terminieren, würde $\big(i(n-1)/2\big) \bmod n = 0$ gelten, für ein $0 < i < n$. Da aber n und $(n-1)/2$ teilerfremd sind, würde n daher i teilen. Dies kann aber nicht sein, da $0 < i < n$ gilt. Daher terminiert der Algorithmus erst bei $i = n$.

Satz 3: Es gilt $i \neq j \Rightarrow P_i \neq P_j$ $(0 \leq i, j \leq n-1)$, d.h. keine Einheitswurzel (außer die des Start- bzw. dem Endpunkts) wird zweimal ausgewählt.
Beweis: Nimmt man an, dass $P_i = P_j$ gilt, dann folgt direkt: $\big(i(n-1)/2\big) \bmod n = \big(j(n-1)/2\big) \bmod n$, also $\big((i-j)\cdot(n-1)/2\big) \bmod n$. Da aber n und $(n-1)/2$ teilerfremd sind, bedeutet das, dass n die Differenz $(i-j)$ teilt. Da aber nach Voraussetzung $0 \leq i, j \leq n-1$ gilt und damit die Differenz nur Werte zwischen $-(n-1)$ und $(n-1)$ annehmen kann, heißt das, dass $i = j$ gelten muss. Deshalb wird eine Einheitswurzel nur einmal ausgewählt, denn jeder Indize entspricht einem Auswahlschritt.

Satz 4: Der Streckenzug ist geschlossen und hat genau n verschiedene Ecken.
Beweis: Man weiß, dass der Streckenzug geschlossen ist, da die letzte und die erste ausgewählte Einheitswurzel gleich sind. Nach Satz 2 werden $n+1$ Einheitswurzel ausgewählt. Lässt man die Letzte weg, hat man n ausgewählte Einheitswurzeln, die nach Satz 3 alle verschieden sind. Es gibt aber nur n verschiedene n-te Einheitswurzeln, daher werden alle genau (außer Start- und Endpunkt) einmal ausgewählt, d.h. der Streckenzug hat genau n verschiedene Ecken.

Satz 5: Jede Kante schneidet alle anderen unter Ausnahme der beiden Angrenzenden.
Beweis: Man wähle eine Kante P_iP_{i+1} $(0 \leq i \leq n-1)$ aus. Man betrachte nun eine zweite, nicht angrenzende, nicht identische Kante P_jP_{j+1}, d.h. $0 \leq j \leq n-1$ und $|j-i| \bmod n \neq 0$ bzw. $\neq \pm 1$. Es gilt $\Delta := P_j - P_i = \big((j-i)\cdot(n-1)/2\big) \bmod n = P_{j+1} - P_{i+1}$. Mit dem oben gesagten über $|j-i|$ ist die Differenz Δ ungleich 0 und $\big(\pm 1(n-1)/2\big) \bmod n = (n \pm 1)/2$, d.h. $0 < \Delta < (n-1)/2$ oder $(n+1)/2 < \Delta < n$. Es gilt desweiteren $P_{j+1} = (P_{i+1} + \Delta) \bmod n = \big(P_i + \Delta + (n-1)/2\big) \bmod n = (P_i + \Delta') \bmod n$ mit $\Delta' := \big(\Delta + (n-1)/2\big) \bmod n$. Hier gilt für die Differenz Δ': $0 < \Delta' < (n-1)/2$ oder $(n-1)/2 < \Delta' < n-1$. Da $\Delta' = \big(\Delta + (n-1)/2\big) \bmod n$ gilt, können nicht beide gleichzeitig größer bzw. kleiner als $(n-1)/2$ sein, das heißt aber, dass wenn man von P_i aus auf der Kreisperipherie entlang geht, man zuerst auf P_j bzw. P_{j+1}, dann auf $P_{i+1} = \big(P_i + (n-1)/2\big) \bmod n$, erst dann auf P_{j+1} bzw. P_j und am Ende wieder auf P_i trifft. Daraus folgt automatisch, dass P_iP_{i+1} P_jP_{j+1} schneidet. Da das beliebige Kanten waren, schneidet jede Kante jede andere unter Ausnahme der beiden angrenzenden und sich selbst.

Satz 6: Es schneiden sich immer genau zwei Kanten in einem Schnittpunkt.
Beweis:



Sei AC die eine Hälfte einer Kante im Einheitskreis und C liege auf dem Einheitskreis. B sei der Mittelpunkt des Einheitskreises. Sei der Winkel $\gamma := \angle CBD$ vorgegeben, gefragt ist nun die Länge $d := |BD|$. Dabei ist D der Schnittpunkt der Geraden BD mit AC, wobei die Gerade BD durch den Winkel, den sie mit BC einschließt, definiert wird. Es gilt, dass $\angle CBA = \angle CBE/2 = (2\pi/n \cdot (n-1)/2)/2 = \pi(n-1)/(2n)$ ist, da der Kreis in n gleich große Sektoren eingeteilt ist und die Kante davon $(n-1)/2$ überspannt. Daraus ergibt sich: $\angle ACB = \pi - \pi/2 - \pi(n-1)/(2n) = \pi/(2n)$. Nun kann man den Sinussatz auf das Dreieck $\triangle CDB$ anwenden: (die Seite BC ist ein Radius des Einheitskreises, daher $|BC| = 1$)

$$\frac{|BD|}{\sin(\angle ACB)} = \frac{d}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \frac{|BC|}{\sin(\pi - \gamma - \angle ACB)} = \frac{1}{\sin(\pi - \frac{\pi}{2n} - \gamma)}$$
$$\Leftrightarrow d = \frac{\sin(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\pi - \frac{\pi}{2n} - \gamma)} \underbrace{=}_{\sin(\pi-\alpha)=\sin(\alpha)} \frac{\sin(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n} + \gamma)}$$

Wähle man nun eine Kante P_jP_{j+1} (die Indizes sind $\bmod n$ zu betrachten) aus und untersucht welche Kanten K $P_{j+i}P_{j+i+1}$ gleichen Abstand zum Mittelpunkt B haben und den selben Winkel mit einem bestimmten Radius (BC von der ausgewählten Kante) einschließen, also welche Kanten sie bei einem vorgegebenen Polarwinkel schneiden. Dabei muss man $\gamma_A \neq \gamma_K$ beachten, denn der Radius BC von K wurde um $2\pi i(n-1)/(2n) \bmod 2\pi$ weitergedreht. Damit gilt also: $\gamma_K = \gamma_A + \pi i(n-1)/n \bmod 2\pi$.

Setzt man nun die Abstände gleich:

$$\begin{aligned}
&d_A = d_K\\
\Leftrightarrow &\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\gamma_A\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2n}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\gamma_K\right)}\\
\Leftrightarrow &\sin\left(\frac{\pi}{2n}+\gamma_A\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2n}+\gamma_K\right)
\end{aligned}$$

Fall 1:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2n}+\gamma_A = \frac{\pi}{2n}+\gamma_K + 2\pi k, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow &\gamma_A = \gamma_A + \pi\frac{i(n-1)}{n} + 2\pi k
\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow i = -\dfrac{kn}{n-1}$, da $i \in \mathbb{Z}$ gelten soll, muss $(n-1)$ k teilen und damit ist $i = -nl$ mit $l \in \mathbb{Z}$ und $k = l(n-1)$, i ist also $\mod n$ kongruent 0 und damit ist K die Kante A selbst.

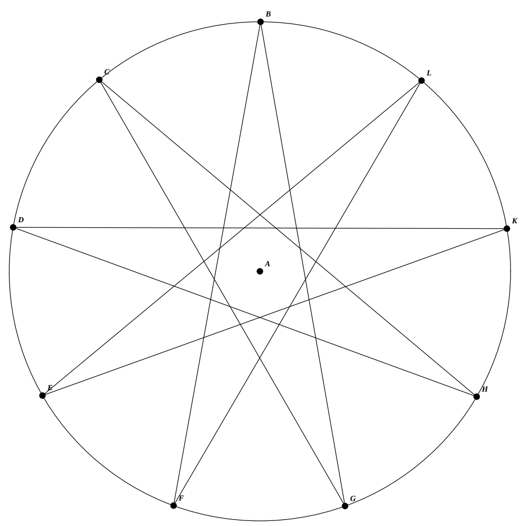
Fall 2:

$$\begin{aligned}
&\frac{\pi}{2n}+\gamma_A = \pi - \left(\frac{\pi}{2n}+\gamma_K\right) + 2\pi k = 2\pi(k+1) - \gamma_A - \pi\frac{i(n-1)}{n} - \frac{\pi}{2n}, \quad k\in\mathbb{Z}\\
\Leftrightarrow &\pi\frac{i(n-1)}{n} = (2k+1)\pi - 2\gamma_A - \frac{2\pi}{2n}\\
\Leftrightarrow &i = \frac{(2k+1)n - \frac{2n}{\pi}\gamma_A - 1}{n-1}
\end{aligned}$$

Da für festes γ_A nur noch k variabel ist, muss man untersuchen, ob sich für unterschiedliches k modulo n inkongruente Lösungen für i ergeben. Dies kann aber nicht sein, da der Ausdruck $2kn/(n-1)$, wenn er eine ganze Zahl darstellt, immer kongruent 0 modulo n ist, da n und $n-1$ teilerfremd sind. Daher gibt es nur maximal eine Lösung für $0 \leq i < n$, d.h. es gibt nur maximal eine Kante K die A bei einem beliebig vorgegebenen Polarwinkel schneiden und damit schneiden sich immer nur genau zwei Kanten in einem Schnittpunkt.

Satz 7: Es gibt $n(n-3)/2$ Selbstüberschneidungen.
Beweis: Das ergibt sich aus Satz 5 und 6 und aus der Begründung aus 4.1.1.

Beispiel für $n = 7$**:**



4.1.3 Schlussfolgerung für $A(n)$

Es gilt:

$$\frac{n(n-3)}{2} \leq A(n) \leq \frac{n(n-3)}{2} \Rightarrow A(n) = \frac{n(n-3)}{2}$$

Damit ist die Aussage bewiesen.

4.2 Lösung zu Teilaufgabe b)

Es wird im Weiteren vorausgesetzt, dass n gerade und größer 2 ist. Zudem wird vorausgesetzt, dass der Streckenzug in gewissem Sinne nicht entartet ist, d.h. keine zwei aneinandergrenzenden Kanten sind parallel, man also den Punkt zwischen ihnen ohne weiteres wegfallen lassen könnte. Dies kann man annehmen, da wenn ein solcher Streckenzug die maximale Anzahl von Selbstüberschneidungen hat, dann existiert auch ein nicht-entarteter Streckenzug mit maximaler Anzahl von Selbstüberschneidungen, der aus dem entarteten durch eine „minimale" Störung der Eckpunkte entsteht. Die Störung soll dabei so sein, dass sich dadurch die Anzahl der Selbstüberschneidungen nicht ändert und und keine drei aufeinanderfolgende Eckpunkte auf einer Linie liegen. Dies ist möglich, da die Störung beliebig klein wählbar ist.
Notationshinweis: Eine i-Kante heißt eine Kante, die i Schnittpunkte hat.

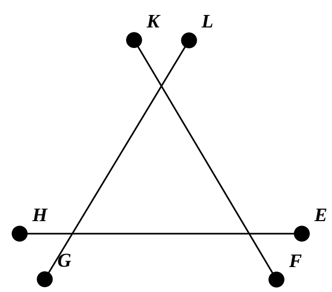
4.2.1 Obergrenze für $A(n)$

Es wird davon ausgegangen, dass der zu betrachtende Streckenzug n Kanten hat.
Es ist offensichtlich, dass auf einer $(n-3)$-Kante kein Punkt existieren kann, in dem sich mehr als zwei Kanten schneiden.

Satz 1: Die angrenzenden Kanten $A_{1,2}$ einer $(n-3)$-Kante K liegen auf verschiedenen Seiten der Kante K.
Beweis: Es schneidet die maximale Anzahl von möglichen Kanten die Kante K. Daher ist der Streckenzug S, den die schneidenden Kanten bilden, zusammenhängend, da der ursprüngliche auch zusammenhängend ist. Da zu jedem Schneiden der Kante K ein Seitenwechsel gehört und die Anzahl der schneidenden Kanten ungerade ist, liegt der Anfang und das Ende von S auf verschiedenen Seiten von K. Da nun $A_{1,2}$ K mit S verbinden, liegen sie auch auf verschiedenen Seiten.

Satz 2: Zwei benachbarten Kanten $K_{1,2}$ können nicht beide $(n-3)$-Kanten sein.
Beweis: K_1 liegt aufgrund Satzes 1 auf einer anderen Seite von K_2, als die andere angrenzende Kante von K_2. Diese ist aber keine angrenzende Kante von K_1 $(n \geq 4)$, daher müsste K_1 sie schneiden, wenn K_1 $(n-3)$ Kanten schneiden soll. Daher können zwei benachbarte Kanten nicht beide $(n-3)$ Kanten schneiden.

Satz 3: In einem geschlossenen Streckenzug mit n Kanten gibt es maximal zwei $(n-3)$-Kanten.
Beweis: Angenommen, es gäbe mehr, dann kann man drei auswählen. Diese sind nicht benachbart, daher müssen sie sich schneiden. Schematisch sieht das so aus:



Die Anzahl der Kanten die in dieser schematischen Zeichnung fehlen, ist $(n-3)$ und damit ungerade. Daher ist die Anzahl der Streckenzüge, die die Verbindungen zwischen den Endpunkten der eingezeichneten Kanten bilden, mit ungerader Kantenanzahl entweder genau eins oder drei, denn ein Streckenzug muss mindestens eine ungerade Anzahl von Kanten haben, da die Anzahl der noch einzufügenden Kanten ungerade ist. Für die beiden anderen Streckenzüge bleibt dann eine gerade Anzahl von Kanten, die entweder in zwei gerade oder zwei ungerade Anzahlen aufgespalten werden kann.

Anmerkung: Bei diesem Teil der Beweisführung ist es größtenteils unerheblich, welchen Punkt man genau nimmt, es kommt nur auf die Anzahl der dazwischenliegenden (oben eingezeichneten) Kanten an. Diese kann nur entweder 0 oder 1 sein, da 2 dazwischenliegenden Kanten bedeuten, dass der ausgewählte

Punkt wieder auf der selben Kante liegt, wie der ursprüngliche, was keine sinnvolle Konstellation ist, wenn man einen geschlossenen Streckenzug mit n Kanten konstruieren will.

Fall 1: Nur ein Streckenzug hat eine ungerade Anzahl von Kanten.
Sei E der Ausgangspunkt des Streckenzugs U mit einer ungeraden Anzahl von Kanten und
Fall 1.1: er überspringe keine Kante, z.B. sei F der Endpunkt.
Die $(n-3)$-Kante LG schneidet alle Kanten von U, denn sie sind alle nicht benachbart. Da aber die Anzahl der Kanten ungerade ist und zu jedem Schneiden ein Seitenwechsel gehört, liegt der Anfangs- und Endpunkt nicht auf der selben Seite von LG aus. Widerspruch, daher ist dieser Fall nicht möglich.
Fall 1.2: er überspringe eine Kante, z.B. sei G der Endpunkt.
Dann gibt es zwei weitere Streckenzüge $G_{1,2}$ mit gerader Anzahl von Kanten. Einer davon verbindet F mit einem anderen Punkt. Dies kann aber nicht sein, da der Streckenzug eine gerade Anzahl von Kanten hat und damit der Anfangs- und der Endpunkt von EH und LG aus auf der selben Seite liegen müssen.
Fall 2: Genau drei Streckenzüge haben eine ungerade Anzahl von Kanten.
Sei E der Ausgangspunkt des Streckenzugs U_1 mit einer ungeraden Anzahl von Kanten und
Fall 2.1: er überspringe keine Kante, z.B. sei F der Endpunkt.
Argumentation wie in Fall 1.1.
Fall 2.2: er überspringe eine Kante, z.B. sei G der Endpunkt.
Dann gibt es zwei weitere Streckenzüge $U_{2,3}$ mit ungerader Anzahl von Kanten. Einer davon verbindet F mit einem anderen Punkt, dabei sind L und H gleichwertig, da man dazu genau eine Kante übersprigen muss. K ist nicht möglich, da KF eine Kante ist. Nehme man nun H. Dann müssen K und L über einen Streckenzug mit ungerader Anzahl von Kanten verbunden werden, was aber nicht möglich ist, da der Anfangs- und der Endpunkt auf unterschiedlichen Seiten der Kante HE liegen.

Damit hat man nun alle Fälle abgearbeitet und es kann daher kein geschlossener Streckenzug existieren, der mehr als zwei $(n-3)$-Kanten hat.

Satz 4: Die Obergrenze für $A(n)$ ist $n(n-4)/2+1$.
Beweis: Nach Satz 3 ist die Maximalanzahl für $(n-3)$-Kanten zwei. Seien die restlichen $(n-2)$ Kanten nun $(n-4)$-Kanten, also die nächstkleinere ganze Zahl, dann ergibt sich:

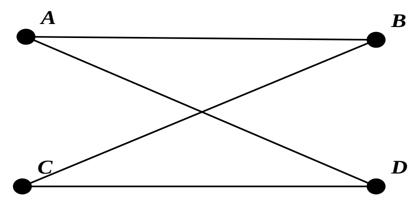
$$A(n) \leq \frac{(n-2)\cdot(n-4)+2\cdot(n-3)}{2} = \frac{n\cdot(n-4)+2}{2} = \frac{n\cdot(n-4)}{2}+1$$

Die Division durch 2 ergibt sich wieder aus der Annahme, dass sich immer nur genau zwei Kanten, also die kleinst mögliche Anzahl, in einem Punkt schneiden.

4.2.2 Untergrenze für $A(n)$

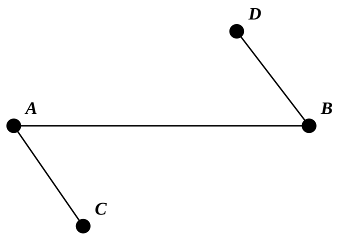
Es wird ein induktiver Konstruktionsalgorithmus angegeben, der für n Kanten einen geschlossenen Streckenzug mit $n(n-4)/2+1$ Selbstüberschneidungen angibt, in dem mindestens eine $(n-3)$-Kante existiert und sich in jedem Schnittpunkt genau zwei Kanten schneiden.

Konstruktion für $n=4$

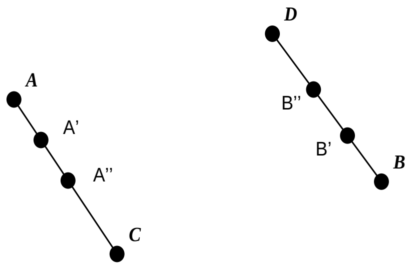


Man überzeugt sich schnell, dass diese Konstruktion den Anforderungen entspricht: Ein Streckenzug mit $n=4$ Kanten und $n(n-4)/2+1=1$ Selbstüberschneidung. Es ist wichtig, dass es genau zwei $(n-3)$-Kanten und der Rest $(n-4)$-Kanten sind. Insbesondere gibt es keine Punkt in denen sich drei oder mehr Kanten schneiden.

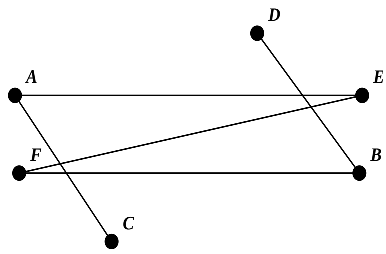
Konstruktion von $n'=n+2$ aus n
Sei AB in dieser schematischen Zeichnung eine $(n-3)$-Kante:



Diese nehme man heraus und verlängere die Kanten AC und BD um ein „kleines" Stück der Länge δ. Die alten Punkte A und B heißen nun A' und B'. Die Punkte A'' und B'' sind dadurch definiert, dass sie die Entfernung δ zu A' bzw. B' haben und auf AC bzw. BD liegen. Die Forderung, die nun an δ gestellt wird, ist die, dass im und auf dem Viereck $A''AB''B$ keine Schnittpunkte liegen. Dies geht, da ein Schnittpunkt existiert, der von der Kante AB einen minimalen Abstand $m > 0$ hat. Wenn man nun $0 < \delta < m$ wählt, was möglich ist, dann gibt es keinen Schnittpunkt innerhalb des Vierecks $A''AB''B$ und dessen Rändern, da es im ursprünglichen Streckenzug mit n Kanten keinen Schnittpunkt gab, in dem sich 3 oder mehr Kanten schnitten.



Nun füge man einen Streckenzug ein, der wie ein (gedrehtes) „N" aussieht:



Die Punkte E und F sind so zu wählen, dass BF und EF die Kante AC schneiden, AE und EF die Kante BD schneiden und $|AF| < \delta$ sowie $|BE| < \delta$ gilt. Dies geht trivialerweise.
Da im und auf dem Viereck $A''AB''B$ keine Schnittpunkte liegen und da AB eine $(n-3)$-Kante war, schneiden die Kanten AE, EF und FB dieselben Kanten wie die Kante AB. Außerdem lässt sich daraus mit dem Wissen, dass der eingefügte Streckenzug keine Selbstüberschneidung hat, folgern, dass in jedem Schnittpunkt sich nur genau 2 Kanten schneiden.

Aussagen über den Konstruktionsalgorithmus

Da es in der Konstruktion für $n = 4$ keinen Punkt gibt, durch den mehr als zwei Kanten gehen und in keinem Schritt ein solcher Punkt hinzukommt, gibt es im ganzen Streckenzug keinen Punkt, in dem sich mehr als zwei Kanten schneiden.
Die Kante EF schneidet alle Kanten, die AB schneidet und noch zwei zusätzliche, nämlich AC und BD. Da AB eine $(n-3)$-Kante war, ist EF eine $(n-1)$-Kante, also eine $(n'-3)$-Kante, damit ist gesichert, dass eine solche für den nächsten Konstruktionsschritt existiert. Da AE und BF AC bzw. BD im Gegensatz zu EF nicht schneiden, aber sonst alle, sind sie $(n-2)$-Kanten.
Damit gilt für die Anzahl der Selbstüberschneidungen S(n) in diesem Streckenzug:
Annahme: $S(n) = n(n-4)/2 + 1$ für gerades n.
Beweis durch Induktion ab $n = 4$:

Induktionsanfang: $n = 4$: $S(n) = S(4) = n(n-4)/2 + 1 = 1$ ist wahr, da die Konstruktion mit 4 Kanten 1 Selbstüberschneidung hat.
Induktionsschritt: Es gilt $S(n) = n(n-4)/2 + 1$.

Induktionsschluss:

$$S(n') = S(n+2) = S(n) - \underbrace{n-3}_{\text{entfernte (n-3)-Kante}} + \underbrace{n-1}_{\text{hinzugefügte (n-1)-Kante}} + \underbrace{2(n-2)}_{\text{hinzugefügte (n-2)-Kanten}}$$

$$= \frac{n^2-4n}{2} + 1 + (2n-2) = \frac{n^2-4}{2} + 1 = \frac{(n+2)(n-2)}{2} + 1 = \frac{n'(n'-4)}{2} + 1$$

Dabei wurde beachtet, dass sich die hinzugefügten Kanten nicht gegenseitig überschneiden.

Daher gilt $S(n) = n(n-4)/2 + 1$.

4.2.3 Schlussfolgerung für $A(n)$

Es gilt:

$$S(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1 \leq A(n) \leq \frac{n(n-4)}{2} + 1 \Rightarrow A(n) = \frac{n(n-4)}{2} + 1$$

Damit ist die Aussage bewiesen.