Lösungen zum Bundeswettbewerb Mathematik 2006 Runde 1

von Yasin Zähringer

24. Februar 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Lösung zu Aufgabe 1

Zwei Zahlen sind:

$$n = \begin{cases} \hfill 99.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.979.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \end{cases}$$

$$n' = n + 1 = \begin{cases} \hfill 99.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999.999. \\ 999.999.999.999.999.980.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. \\ 000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. \\ 000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. \\ 000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000.000. \end{cases}$$

oder kürzer ausgedrückt:

$$\begin{aligned} n &= \overbrace{9}^{222x}7\overbrace{9}^{223x} \\ n' &= \underbrace{9}_{222x}8\underbrace{0}_{223x} \end{aligned}$$

Es gilt für die Quersumme $Q(n)$ von n:

$$\begin{aligned} Q(n) &= 222 \cdot 9 + 7 + 223 \cdot 9 = 4012 = 2 \cdot 2006 \\ Q(n') &= 222 \cdot 9 + 8 + 223 \cdot 0 = 2006 \end{aligned}$$

Die beiden Zahlen n und n' erfüllen offensichtlicherweise die geforderten Eigenschaften.

2 Lösung zu Aufgabe 2

Man betrachte die Gleichung

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 &= 4(x^2y + xy^2 + 1) \quad (1)\\ \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) &= 4xy(x+y) + 4 \\ \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - 5xy + y^2) &= 4 \end{aligned}$$

Da x und y ganze Zahlen sind, sind die einzelnen Faktoren auch ganze Zahlen und damit teilt $(x+y)$ die rechte Seite, also 4. Daher kommen für den Term $(x+y)$ nur die Werte $n = \pm 1$, ± 2 und ± 4 in Frage. Damit gilt dann $y = n - x$. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} (x+y)(x^2 - 5xy + y^2) &= 4 \\ \Leftrightarrow n(x^2 - 5x(n-x) + (n-x)^2) &= 4 \\ \Leftrightarrow n(x^2 - 5xn + 5x^2 + n^2 - 2xn + x^2) &= 4 \\ \Leftrightarrow 7nx^2 - 7n^2x + n^3 &= 4 \end{aligned}$$

Existieren nun x, y, sodass diese Gleichung gilt, dann müssen beide Seiten modulo 7 offensichtlicherweise kongruent sein:

$$7nx^2 - 7n^2x + n^3 \equiv n^3 \overset{!}{\equiv} 4 \mod 7$$

n^3 kann nur diese Werte annehmen:

$$\begin{aligned} n &= \pm 1 && \Rightarrow n^3 \equiv \pm 1 \mod 7 \\ n &= \pm 2 && \Rightarrow n^3 \equiv \pm 1 \mod 7 \\ n &= \pm 4 && \Rightarrow n^3 \equiv \pm 1 \mod 7 \end{aligned}$$

Da $\pm 1 \not\equiv 4 \mod 7$ gilt, ist damit bewiesen, dass es keine ganzen Zahlen x, y geben kann, die Gleichung 1 erfüllen.

3 Lösung zu Aufgabe 3

c kann nicht die größte Seite sein, da $a^2 + b^2 > 5c^2$ impliziert, dass a oder b größer als c ist. Denn angenommen es sei nicht so, dann würde $a^2 + b^2 \leq c^2 + c^2 = 2c^2$ gelten, was aber der Voraussetzung widerspricht.
Wenn c die Seite mit mittlerer Länge wäre, dann würde gelten:

1. o.B.d.A. $a \leq c$, sonst kann man die Bezeichungen von a und b vertauschen

2. Aus der Dreiecksungleichung $b \leq a + c$ folgt mit 1., dass $b \leq c + c = 2c$ gilt.

Daraus folgt:

$$a^2 + b^2 \leq c^2 + 4c^2 = 5c^2$$

Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daher ist c die kleinste Seite.

4 Lösung zu Aufgabe 4

4.1 Untergrenze für die minimale Schnittanzahl

Da nach der minimalen Anzahl von Schnitten gefragt ist, kann man annehmen, dass jeder Schnitt durch zwei Kanten (mehr ist nicht möglich) geht und damit durch keine Ecke. Dies muss der Fall sein, da ein durch eine Ecke schneiden keinen neuen Eckpunkt (an dieser Stelle) erzeugt und damit nicht die maximal mögliche Anzahl neuer Kanten bzw. Ecken. Denn es genügt eine kleine Verschiebung, sodass durch eine Kante geschnitten wird und da dies keinen Einfluß auf den Schnittprozess hat, weil diese Änderung nur lokal ist, vergrößert diese kleine Verschiebung die Gesamtanzahl der Kanten am Ende, d.h. die ursprüngliche Schnittfolge konnte nicht die optimale gewesen sein.

Bei jedem Zerscheiden entsteht ein neues Teil, da man eins in zwei Teile aufteilt.
Zerschneidet man ein Blatt Papier, das auf dem Tisch liegt in zwei Teile, dann kommen vier neue Kanten zur Gesamtanzahl hinzu, da durch die Trennung der beiden Teile zwei Kanten hinzukommen, zum anderen werden zwei Kanten geteilt, daher entsehen vier neue Kanten insgesamt.
Insgesamt gilt also diese Rekursion:

$$\begin{aligned} T_0 &= 1 & T_{n+1} &= T_n + 1 & &\Rightarrow T_n = n + 1 \\ K_0 &= 4 & K_{n+1} &= K_n + 4 & &\Rightarrow K_n = 4n + 4, \end{aligned}$$

wobei T_n die Anzahl der Teile und K_n die Anzahl der Kanten nach n Schnitten ist.

Wenn man nun den Zustand nach n Schnitten erreicht hat, dass 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen und dieser mit der minimalen Anzahl von Schnitten erreicht werden soll, dann müssen sicherlich die Teile, die nicht zu den 100 Zwanzigecken gehören, 3 Ecken und damit auch drei Kanten haben, da mehr bedeuten würde, dass Schnitte „verschwendet“ wurden. Weniger Ecken sind aufgrund der Nichtexistenz eines flächigen, von Linien begrenzten Zweiecks (zumindest in der euklidischen Geometrie) nicht möglich.
Folgende Gleichung drückt genau dies aus:

$$\begin{aligned} 3(T_n - 100) &= K_n - 20 \cdot 100 \\ \Rightarrow 3(n - 99) &= 4n - 1996 \\ \Rightarrow n &= 1699 \end{aligned}$$

1699 stellt somit die Untergrenze für die minimale Schnittanzahl da.

4.2 Obergrenze für die minimale Schnittanzahl

Man nehme das Quadrat und zerschneide es in 99 Schnitten zu 100 parallelen, nicht notwendigerweise gleichgroßen Rechtecken. Jedes dieser Rechtecke kann man nun mit 16 Schnitten zu einem Zwanzigeck zurechtschneiden und zwar so, dass mit jedem Schritt genau eine Kante hinzukommt.
Damit ergibt sich für die Gesamtanzahl der Schnitte $99 + 16 \cdot 100 = 1699$. Somit kann man ein rechteckiges Blatt mit 1699 Schnitten in 100 Zwanzigecke zerschneiden.

4.3 Minimale Schnittanzahl

Aus 4.1 und 4.2 folgt, dass die kleinste Anzahl von Schnitten 1699 ist, um 100 Zwanzigecke auf dem Tisch liegen zu haben.