Lösungen zum Bundeswettbewerb Mathematik 2006 Runde 2

von Yasin Zähringer

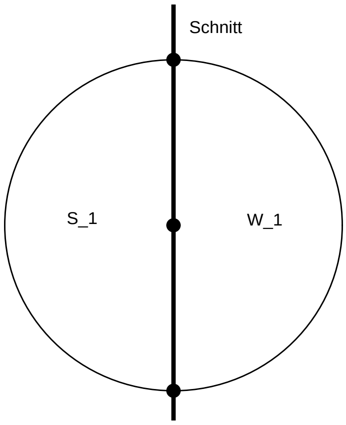
31. August 2006

Inhaltsverzeichnis

1 Lösung zu Aufgabe 1

Zur Bezeichnung: Die weiße Zahl i wird mit W_i gekennzeichnet und die schwarze Zahl j mit B_j. Ein gültiger Kreis sei einer, der die Forderungen nach der Färbung und der Zahlenreihenfolge erfüllt.
Zu zeigen ist, dass in jedem gültigen Kreis K_n mit $2n$ Sektoren n aufeinanderfolgende Sektoren existieren, in denen alle Zahlen 1 bis n stehen, also jede genau einmal. Da jede Zahl insgesamt doppelt vorkommt, als weiße und als schwarze, müssen in den restlichen n Sektoren, die auch zusammenhängen, auch alle Zahlen 1 bis n genau einmal stehen. Daher gibt es also zwei disjunkte Sektorenbereiche und zwischen diesen einen Schnitt, der den Kreis halbiert, sodass auf jeder Seite des Schnittes jede Zahl nur genau einmal steht. Wenn man nun für jeden beliebigen gültigen Kreis K_n die Existenz dieses Schnittes nachweisen kann, ist die Aufgabe bewiesen.

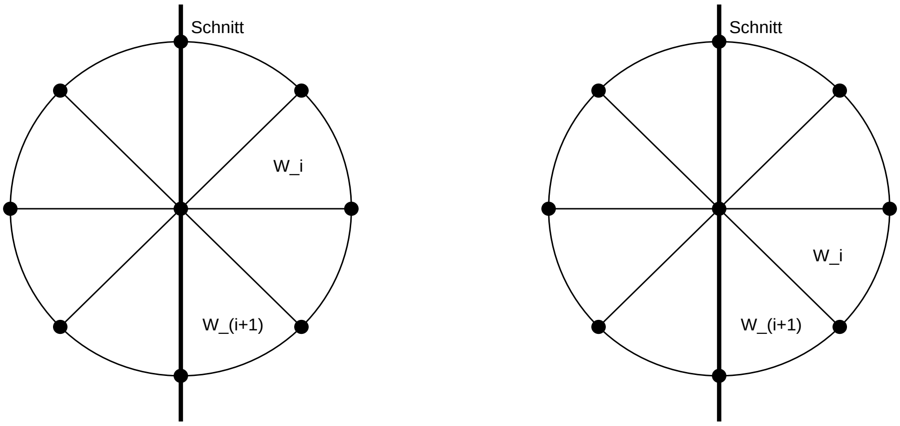
Satz 1: Alle gültigen Kreise K_n mit $n = 1$ haben einen Schnitt
Beweis: Die einzige Möglichkeit bis auf unterschiedliche Orientierung die zwei Zahlen W_1 und S_1 anzuordnen, ist diese:



Satz 2: Wenn der gültige Kreis K_n^2 verschiebungsäquivalent zu einem gültigen Kreis K_n^1 ist und ein Schnitt für K_n^1 existiert, dann existiert er auch für K_n^2 ($n \neq 1$).
Beweis: Dass K_n^2 verschiebungsäquivalent zu K_n^1 ist, bedeutet, dass man genau einen Sektor von K_n^1 verschiebt um K_n^2 aus K_n^1 zu erstellen. Dabei muss beachtet werden, dass K_n^2 auch ein gültiger Kreis ist. O.B.d.A. sei es der weiße Sektor W_i, der verschoben wird. Bei einem schwarzen verläuft der Beweis analog. W_i kann im Gegenuhrzeigersinn nur bis W_{i-1} (wenn $i = 1$ gilt, sei dies W_n) und im Uhrzeigersinn nur bis W_{i+1} (wenn $i = n$ gilt, sei dies W_1)[1] verschoben werden, da K_n^2 auch ein gültiger Kreis ist und somit nicht über die vorhergende bzw. darauffolgende gleichfarbige Zahl springen darf.
O.B.d.A. W_i wird im Uhrzeigersinn verschoben. Die Verschiebung im Gegenuhrzeigersinn geht analog. Da K_n^1 einen Schnitt hat, kann W_i null-, ein - oder zweimal über die Schnittgrenze von K_n^1 verschoben werden. Mehr geht nicht, da sonst W_i mehr als einen Kreisbogen zurückgelegt hat, weil er die selbe Schnittgrenze ein zweites mal überqueren müsste. Die Verschiebung muss aber auch mit weniger als einem kompletten Kreisbogen zurückgelegter Strecke funktionieren, da eine komplette Umrundung keiner Bewegung entspricht. Wenn W_i an der Schnittgrenze eingefügt wird, dann wird die Zahl dem Schnitt zugerechnet, aus dem sie stammt.

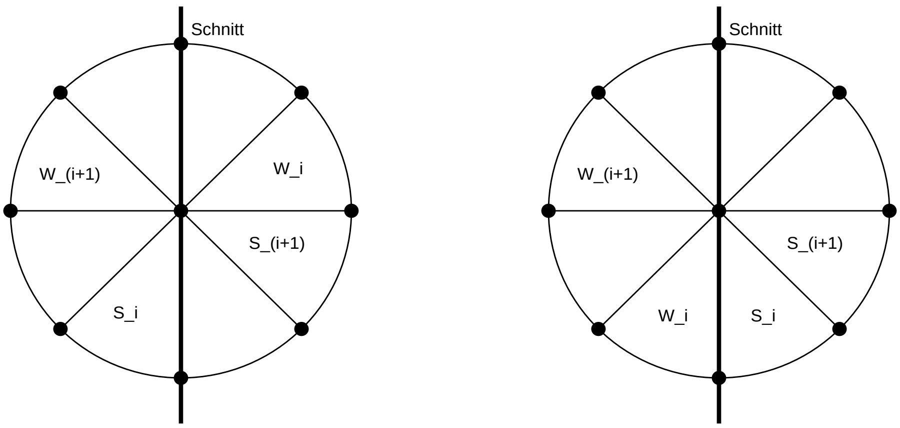
- Wenn W_i nicht über die Schnittgrenze von K_n^1 verschoben wird, dann liegen auf beiden Seiten des Schnittes n Zahlen und jede Zahl zwischen 1 und n kommt genau einmal vor. Daher existiert ein Schnitt für K_n^2.

[1] dieser Kommentar gilt auch im weiteren



Beispiel für W_i wird nicht über die Schnittgrenze verschoben

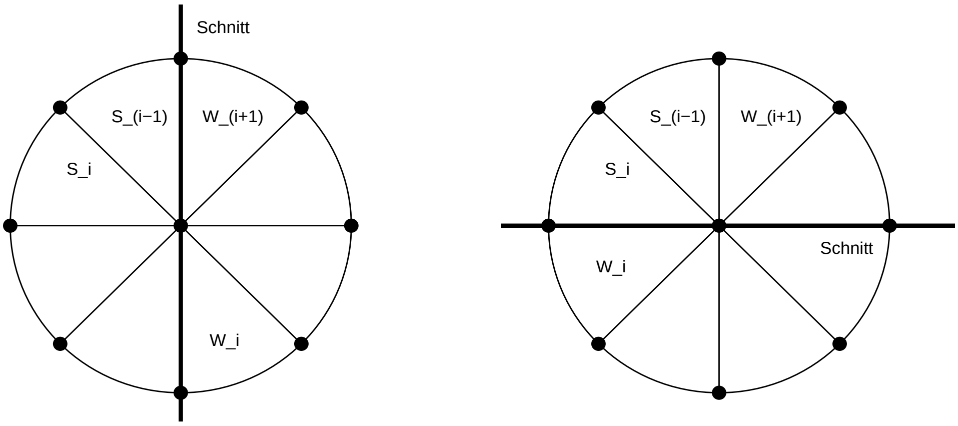
- Wenn W_i nur über eine Schnittgrenze von K_n^1 verschoben wird, dann können W_i und W_{i+1} auf unterschiedlichen Seiten oder auf der gleichen Seite des Schnittes von K_n^1 liegen.
  - Wenn sie auf unterschiedlichen Seiten liegen, dann liegt S_{n+1} auf der Seite von W_i und S_i auf der Seite von W_{n+1}, da W_j und S_j nicht auf der gleichen Seite liegen können. Direkt im Gegenuhrzeigersinn neben W_{n+1} kann auch nicht die Schnittgrenze liegen, da W_i im Gegenuhrzeigersinn von W_{n+1} liegen muss und daher, falls dies der Fall wäre, auch nicht über die Schnittgrenze geschoben werden könnte. Da zwischen W_i und W_{i+1} keine weiße Zahl liegt, gibt es eine schwarze Zahl, neben der im Gegenuhrzeigersinn die Schnittgrenze liegt. Diese Zahl muss S_i sein, da S_{i+1} nicht auf der Seite von S_i liegt und im Uhrzeigersinn gesehen S_i die nächste schwarze Zahl nach S_{i+1} ist. Daher wird W_i über S_i geschoben, weil W_i nicht im Gegenuhrzeigersinn von S_i eingefügt werden kann, da es dann nicht über die Schnittgrenze geschoben wird. Wenn man nun S_i dem Schnitt zurechnet, aus dem W_i herausgeschoben wurde, dann hat dieser n Zahlen, von denen keine doppelt vorkommt, was aus der Eigenschaft des Schnitts des Kreises K_n^1 folgt.



Beispiel: W_i wird über eine Schnittgrenze verschoben und W_i und W_{i+1} liegen auf unterschiedlichen Seiten

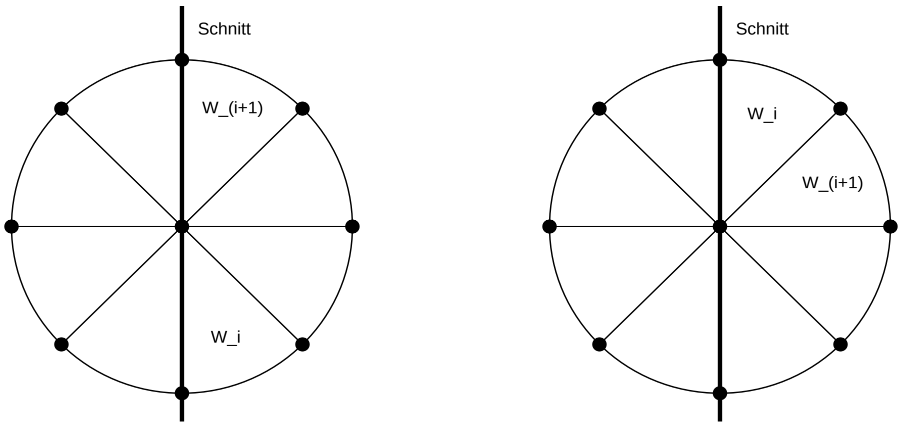
  - Wenn sie auf der gleichen Seite liegen, dann sind beide Seiten des Schnittes einfarbig, da im Uhrzeigersinn zwischen W_i und W_{i+1} keine weißen Zahlen liegen. Daher ist die eine Seite nur schwarz und die andere ist dann notwendigerweise auch nur weiß. Nun wird W_i in den schwarzen Bereich verschoben. Der neue Schnitt grenzt nun an S_i und zwar so, dass S_i und W_i nicht auf der gleiche Seiten liegen. O.B.d.A. grenze die Schnittgerade im Gegenuhrzeigersinn an S_i an, dann ist S_i mit den im Uhrzeigersinn folgenden $n-1$ Zahlen auf einer Seite. Zuerst kommen m schwarze Zahlen (mit S_i), also mindestens 1 und maximal $n-1$, denn wenn es mehr wären, wäre W_i nicht zwischen zwei schwarzen Zahlen eingefügt worden. Die restlichen $n-m \leq n-1$ Zahlen sind weiß, da im Uhrzeigersinn $n-1$ weiße Zahlen, vor dem Verschieben n, an den schwarzen Bereich angrenzen. Nun liegen im Uhrzeigersinn von S_i aus die Zahlen $S_{i-1}, S_{i-2}, \ldots$, bei S_1 angekommen wird mit S_n weitergezählt. Es wird also abwärts gezählt. Der weiße Bereich beginnt mit W_{i+1}, da dies die nächste weiße Zahl nach W_i ist. Ab da wird aufwärts gezählt, bei W_n angekommen wird mit W_1 weitergezählt.

Da nun einmal von S_i abwärts und von W_{i+1} aufwärts gezählt wird, insgesamt n Zahlen und es insgesamt nur n Zahlen gibt, müssen sie alle verschieden sein. Daher grenzt dieser Schnitt zwei Bereiche ab, die beide alle Zahlen von 1 bis n enthalten.



Beispiel: W_i wird über eine Schnittgrenze verschoben und W_i und W_{i+1} liegen auf der selben Seiten

- Wenn W_i über zwei Schnittgrenzen verschoben wird, liegt es wieder in seinem ursprünglichen Bereich und auf beiden Seiten der Schnittgerade von K_n^1 liegen auch bei K_n^2 alle Zahlen von 1 bis n.



Beispiel: W_i wird über zwei Schnittgrenzen verschoben

Satz 3: Alle gültigen Kreise K_n mit $n > 1$ haben einen Schnitt.
Beweis: Sei $K_n = V_1$ ein beliebiger gültiger Kreis. Konstruiere man nun V_i aus V_{i-1} $(1 < i \leq n)$ indem man W_i so verschiebt, dass im Uhrzeigersinn W_i direkt auf W_{i-1} folgt. Dies muss gehen, da V_{i-1} ein gültiger Kreis ist und daher im Uhrzeigersinn von W_{i-1} aus W_i die nächste weiße Zahl ist. Daher ist V_i auch ein gültiger Kreis und V_{i-1} verschiebungsäquivalent zu V_i. So kann man nun alle $V_2, \ldots, V_n$ konstruieren. V_n hat nun nach Konstruktion die Eigenschaft, dass alle weißen Zahlen hintereinander stehen, also es n aufeinanderfolgende Zahlen gibt, die die Zahlen 1 bis n genau einmal enthalten. Damit existiert für V_n ein Schnitt und da aus der Verschiebungsäquivalenz und aus der Existenz eines Schnitts für V_i nach *Satz* 2 die Existenz des Schnitts von V_{i-1} folgt, folgt aus der Existenz eines Schnittes für V_n auch, dass für V_1 also K_n auch ein Schnitt existiert. Da K_n beliebig war, hat jeder gültige Kreis mit $n \neq 1$ einen Schnitt.

Insgesamt folgt also, dass für ein beliebiges K_n mit $n \geq 1$ ein Schnitt existiert und somit ist die Aufgabe bewiesen.

2 Lösung zu Aufgabe 2

$\mathbb{N}$ ist per Definition in dieser Aufgabe die Menge $\{1, 2, 3, \ldots\}$.
Da $f(x) > 0$ ($x \in \mathbb{Q}^+$) gilt, kann man eine Funktion $g(x) = (f(x))^{-1}$ einführen. Die Funktionalgleichung für $f(x)$ ergibt dann folgende Funktionalgleichung für $g(x)$ ($x \in \mathbb{Q}^+$):

$$\begin{aligned} \frac{f(xy)}{f(x+y)} &= f(x) + f(y) + 2xy \cdot f(xy) \\ \Leftrightarrow \frac{g(x+y)}{g(xy)} &= \frac{1}{g(x)} + \frac{1}{g(y)} + \frac{2xy}{g(xy)} \\ \Leftrightarrow g(x+y) &= g(xy) \cdot \left(\frac{1}{g(x)} + \frac{1}{g(y)} \right) + 2xy \end{aligned}$$

Berechnung von $g(2)$:

$$x = y = 1 \Rightarrow g(2) = g(1+1) = g(1) \cdot \left(\frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(1)} \right) + 2 = 1 + 1 + 2 = 4$$

Berechnung von $g(4)$:

$$\begin{aligned} x = y = 2 \Rightarrow g(4) &= g(4) \cdot \left(\frac{1}{g(2)} + \frac{1}{g(2)} \right) + 8 \\ \Rightarrow g(4) &= \frac{2g(4)}{g(2)} + 8 \Rightarrow \frac{1}{2} g(4) = 8 \\ \Rightarrow g(4) &= 16 \end{aligned}$$

Berechnung von $g(1)$:

$$\begin{aligned} x = 1 \wedge y = 2 \Rightarrow g(3) &= g(2) \cdot \left(\frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(2)} \right) + 4 \\ \Rightarrow g(3) &= \frac{g(2)}{g(1)} + 1 + 4 = \frac{4}{g(1)} + 5 \\ x = 1 \wedge y = 3 \Rightarrow g(4) &= g(3) \cdot \left(\frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(3)} \right) + 6 \\ \Rightarrow 16 &= \frac{g(3)}{g(1)} + 1 + 6 = \frac{g(3)}{g(1)} + 7 \\ \text{Ineinander eingesetzt: } 16 &= \frac{g(3)}{g(1)} + 7 = \frac{\frac{4}{g(1)} + 5}{g(1)} + 7 = \frac{4}{g^2(1)} + \frac{5}{g(1)} + 7 \\ \Rightarrow \frac{4}{g^2(1)} &+ \frac{5}{g(1)} - 9 = 0 \Leftrightarrow 4 + 5g(1) - 9g^2(1) = 0 \\ \Rightarrow g(1) &= \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{-18} = \frac{-5 \pm 13}{-18} \\ \Rightarrow g(1) = 1 &\vee g(1) = -\frac{8}{18} < 0 \end{aligned}$$

Da g positiv ist (f ist positiv), gilt $g(1) = 1$.

Beweis von $g(n) = n^2$:

Beweis der Behauptung $g(n) = n^2$ mit $n \in \mathbb{N}$ mittels Induktion.

Induktionsanfang:

$$n = 1 \Rightarrow g(1) = 1^2 = 1$$

Induktionsannahme:

$$g(n) = n^2$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} x = n \wedge y = 1 &\Rightarrow g(n+1) = g(n) \cdot \left(\frac{1}{g(n)} + \frac{1}{g(1)}\right) + 2n \\ &\Rightarrow g(n+1) = 1 + g(n) + 2n \overset{\text{IA}}{=} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \end{aligned}$$

□

Beweis von $g(1/n) = 1/n^2$:

$(n \in \mathbb{N})$

Beweis der Behauptung $g(a + \frac{1}{n}) = a^2 + \frac{2a}{n} + g(\frac{1}{n})$ mit $a, n \in \mathbb{N}$ mittels Induktion über a.

Induktionsanfang:

$$a = 1 \Rightarrow g\left(1 + \frac{1}{n}\right) = g\left(\frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{g\left(\frac{1}{n}\right)} + 1\right) + \frac{2}{n} = 1^2 + \frac{2 \cdot 1}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right)$$

Induktionsannahme:

$$g\left(a + \frac{1}{n}\right) = a^2 + \frac{2a}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right)$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned} x = 1 \wedge y = a + \frac{1}{n} \Rightarrow g\left(1 + a + \frac{1}{n}\right) &= g\left(a + \frac{1}{n}\right) \cdot \left(\frac{1}{g(1)} + \frac{1}{g(a + \frac{1}{n})}\right) + 2\left(a + \frac{1}{n}\right) \\ &= g\left(a + \frac{1}{n}\right) + 1 + 2\left(a + \frac{1}{n}\right) \overset{\text{IA}}{=} a^2 + \frac{2a}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right) + 1 + 2\left(a + \frac{1}{n}\right) \\ &= a^2 + 2a + 1 + \frac{2a}{n} + \frac{2}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right) = (a+1)^2 + \frac{2(a+1)}{n} + g\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned}$$

□

Setzt man nun $a = n$:

$$g\left(n + \frac{1}{n}\right) = n^2 + 2 + g\left(\frac{1}{n}\right)$$

Es gilt aber auch:

$$x = n \wedge y = \frac{1}{n} \Rightarrow g\left(n + \frac{1}{n}\right) = g(1) \cdot \left(\frac{1}{g(n)} + \frac{1}{g(\frac{1}{n})}\right) + 2 = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{g(\frac{1}{n})} + 2$$

Also:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}+\frac{1}{g(\frac{1}{n})}+2=n^2+2+g\left(\frac{1}{n}\right)\Leftrightarrow\frac{1}{n^2}+\frac{1}{g(\frac{1}{n})}=n^2+g\left(\frac{1}{n}\right)\\
\Rightarrow & g^2\left(\frac{1}{n}\right)+g\left(\frac{1}{n}\right)\cdot\left(n^2-\frac{1}{n^2}\right)-1=0\\
\Rightarrow & g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{-(n^2-\frac{1}{n^2})\pm\sqrt{n^4-2+\frac{1}{n^4}+4}}{2}=\frac{-n^2+\frac{1}{n^2}\pm(n^2+\frac{1}{n^2})}{2}\\
\Rightarrow & g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\vee g\left(\frac{1}{n}\right)=-n^2<0
\end{aligned}$$

Da g positiv ist (f ist positiv), gilt $g(1/n)=1/n^2$.

Beweis von $g(a/n)=a^2/n^2$:

($a,n\in\mathbb{N}$)
Beweis der Behauptung $g(\frac{a}{n})=\frac{a^2}{n^2}$ mit $a,n\in\mathbb{N}$ mittels Induktion über a für alle n.

Induktionsanfang:

$$\forall n: a=1\Rightarrow g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$$

Induktionsannahme:

$$\forall n: g\left(\frac{a}{n}\right)=\frac{a^2}{n^2}$$

Induktionsschluss:

$$\begin{aligned}
\forall n: x=\frac{a}{n}\wedge y=\frac{1}{n}\Rightarrow g\left(\frac{a+1}{n}\right)&=g\left(\frac{a}{n}+\frac{1}{n}\right)=g\left(\frac{a}{n^2}\right)\cdot\left(\frac{1}{g\left(\frac{a}{n}\right)}+\frac{1}{g\left(\frac{1}{n}\right)}\right)+\frac{2a}{n^2}\\
&\overset{\text{IA}}{=}\frac{a^2}{n^4}\cdot\left(\frac{n^2}{a^2}+n^2\right)+\frac{2a}{n^2}=\frac{1}{n^2}+\frac{a^2}{n^2}+\frac{2a}{n^2}=\frac{(a+1)^2}{n^2}
\end{aligned}$$

□

Da sich jedes $x\in\mathbb{Q}^+$ aufgrund seiner Rationalität und Positivität als p/q mit $p,q\in\mathbb{N}$ darstellen lässt, gilt mit $a=p$ und $n=q$:

$$g(x)=g\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{p^2}{q^2}=x^2$$

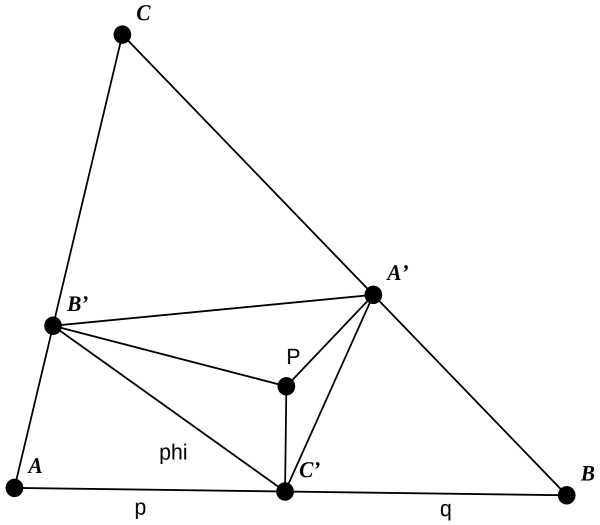
Da die Funktion g allein aus den Eigenschaften der Funktionalgleichung für f konstruiert wurde (und die Transformation keinen Einfluß auf die Anzahl der Lösung hat), kann $f(x)$ auf $\mathbb{Q}^+$, wenn es existiert, nur diese Gestalt haben:

$$f(x)=\frac{1}{g(x)}=\frac{1}{x^2},$$

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen der Aufgabe, da der Bildbereich des Defintionsbereiches positiv ist und es die Funktionalgleichung auf $\mathbb{Q}^+$ löst:

$$\begin{aligned}
&f(x)+f(y)+2xy\cdot f(xy)\overset{!}{=}\frac{f(xy)}{f(x+y)}\\
&\quad\Rightarrow\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}\overset{!}{=}\frac{\frac{1}{(xy)^2}}{\frac{1}{(x+y)^2}}=\frac{(x+y)^2}{(xy)^2}=\frac{x^2+y^2+2xy}{(xy)^2}=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{2}{xy}
\end{aligned}$$

3 Lösung zu Aufgabe 3



Bezeichnungen

$$\alpha = \angle BAC \qquad \beta = \angle CBA \qquad \gamma = \angle ACB$$
$$a = |BC| \qquad b = |CA| \qquad c = |AB|$$

Die Bezeichnung der Lotfußpunkte ist entsprechend der Aufgabe.

$$a' = |B'C'| \qquad b' = |C'A'| \qquad c' = |A'B'|$$
$$p = |AC'| \qquad q = |C'B|$$
$$x = |PC'| \qquad \varphi = \angle B'C'A$$

Rekonstruktion der Lage des Punktes P

Da das Dreieck spitzwinklig ist, gilt $0° < \alpha, \beta, \gamma < 90°$, d.h. kein Sinus eines dieser Winkel ist gleich 0 und keine Seite hat die Länge 0. Desweiteren kann P nicht auf einer der Ecken liegen, also $p, q \neq 0$, da sonst zwei Lotfußpunkte identisch sind und damit ein Winkel undefiniert wird, d.h. die Bedingungen aus der Aufgabenstellung nicht mehr erfüllt werden können. Daher sind auch die Dreiecke $\triangle AC'B'$ und $\triangle A'C'B$ nicht entartet und damit ist kein Sinus eines ihrer Winkel 0.

Nach Voraussetzung soll gelten:

$$\alpha = \angle BAC \stackrel{!}{=} \angle B'A'C'$$
$$\text{und } \beta = \angle CBA \stackrel{!}{=} \angle C'B'A'$$

Da $\triangle A'B'C'$ ein Dreieck ist, gilt: $\angle A'C'B' = 180° - \angle B'A'C' - \angle C'B'A' = 180° - \alpha - \beta = \gamma$

Also ist $\triangle A'B'C'$ ähnlich zu $\triangle ABC$. Daher soll gelten:

$$s = \frac{a'}{a} = \frac{b'}{b} = \frac{c'}{c}$$

Es muss $s \neq 0$ gelten, da die Eckpunkte von $\triangle A'B'C'$ auf den Kanten, aber nicht auf den Eckpunkten von $\triangle ABC$ liegen.

Anwendung des Sinussatzes auf $\triangle AC'B'$:

$$\begin{aligned} p \cdot \sin\alpha &= a' \cdot \sin(180° - \alpha - \varphi) = sa \cdot \sin(\alpha + \varphi) \\ \Rightarrow \frac{1}{s}\frac{\sin\alpha}{a} &= \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{p} \end{aligned}$$

Anwendung des Sinussatzes auf $\triangle A'C'B$

$$\begin{aligned} \angle BC'A' &= 180° - \varphi - \angle A'C'B' = 180° - \varphi - \gamma \\ q \cdot \sin\beta &= b' \cdot \sin(180° - \beta - \angle BC'A') = sb \cdot \sin(\gamma + \varphi - \beta) \\ \Rightarrow \frac{1}{s}\frac{\sin\beta}{b} &= \frac{\sin(\gamma+\varphi-\beta)}{q} \end{aligned}$$

Der Sinussatz auf $\triangle ABC$ angewandt, ergibt $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \neq 0$. Kombiniert man dies mit den vorherigen Aussagen, gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{p} &= \frac{1}{s}\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{s}\frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin(\gamma+\varphi-\beta)}{q} \\ \Rightarrow \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{p} &= \frac{\sin(\gamma+\varphi-\beta)}{q} \\ \Rightarrow \frac{p}{q} &= \frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin(\gamma+\varphi-\beta)} \qquad (\sin\angle C'A'B \neq 0) \\ \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} &= \frac{\sin^2(\alpha+\varphi)}{\sin^2(\gamma+\varphi-\beta)} \end{aligned}$$

Berechnung von x mittels des Sinussatzes angewandt auf $\triangle C'PB'$:

$$\begin{aligned} \angle B'PC' &= 360° - \alpha - \angle PC'A - \angle AB'P = 360° - \alpha - 90° - 90° = 180° - \alpha \ (\square AC'PB') \\ \angle C'B'P &= 180° - \angle B'PC' - (90° - \varphi) = \alpha + \varphi - 90° \ (\triangle C'PB') \\ x \cdot \sin\angle B'PC' &= x\sin\alpha = a' \cdot \sin\angle C'B'P = a' \cdot \sin(\alpha + \varphi - 90°) = -sa\cos(\alpha+\varphi) \\ \Rightarrow x \cdot \frac{1}{s}\frac{\sin\alpha}{a} &= -\cos(\alpha+\varphi) \end{aligned}$$

Berechnung von x mittels des Sinussatzes angewandt auf $\triangle C'PA'$:

$$\begin{aligned} \angle C'PA' &= 360° - \beta - \angle BC'P - \angle PA'B = 360° - \beta - 90° - 90° = 180° - \beta \ (\square A'PC'B) \\ \angle PA'C' &= 180° - \angle C'PA' - (\angle A'C'B' - \angle PC'B') = 180° - (180° - \beta) - (\gamma - (90° - \varphi)) \\ &= 90° + \beta - \gamma - \varphi \ (\triangle C'PA') \\ x \cdot \sin\angle C'PA' &= x\sin\beta = b' \cdot \sin\angle PA'C' = b' \cdot \sin(90° + \beta - \gamma - \varphi) = sb\cos(\beta - \gamma - \varphi) \\ &= sb\cos(\gamma + \varphi - \beta) \\ \Rightarrow x \cdot \frac{1}{s}\frac{\sin\beta}{b} &= \cos(\gamma+\varphi-\beta) \end{aligned}$$

Da $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} \neq 0$ gilt, folgt:

$$\begin{aligned} -\cos(\alpha+\varphi) = x \cdot \frac{1}{s}\frac{\sin\alpha}{a} &= x \cdot \frac{1}{s}\frac{\sin\beta}{b} = \cos(\gamma+\varphi-\beta) \\ \Rightarrow -\cos(\alpha+\varphi) &= \cos(\gamma+\varphi-\beta) \\ \Rightarrow \cos^2(\alpha+\varphi) &= \cos^2(\gamma+\varphi-\beta) \\ \Rightarrow 1 - \cos^2(\alpha+\varphi) &= 1 - \cos^2(\gamma+\varphi-\beta) \\ \Rightarrow \sin^2(\alpha+\varphi) &= \sin^2(\gamma+\varphi-\beta) \end{aligned}$$

Aus dem Vorherigen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{q^2} &= \frac{\sin^2(\alpha+\varphi)}{\sin^2(\gamma+\varphi-\beta)} = \frac{\sin^2(\gamma+\varphi-\beta)}{\sin^2(\gamma+\varphi-\beta)} = 1 \\ \Rightarrow p^2 &= q^2 \end{aligned}$$

Da nach Definition $p + q = c > 0$ gilt, kann nicht $p = -q$ oder $p = q < 0$ gelten, da sonst $p + q = 0$ bzw. $p + q < 0$ gelten würde. Daher gilt $p = q > 0$.

Damit ist C' die Mitte von AB und da die Seiten zyklisch vertauschbar sind, sind alle Lotfußpunkte Seitenmitten. Da P senkrecht über allen liegt, ist er der Mittelsenkrechtenschnittpunkt. Wenn es also einen Punkt P mit den gegebenen Anforderungen gibt, dann ist es der Mittelsenkrechtenschnittpunkt.

Beweis, dass der Mittelsenkrechtenschnittpunkt die Anforderungen erfüllt

Da die Lotfußpunkte die Mitten der entsprechenden Seiten sind, folgt nach dem Strahlensatz, dass die Seiten $A'B'$, $B'C'$ und $C'A'$ halb so lang sind wie Seiten AB, BC bzw. CA. Daher ist das Dreieck $\triangle A'B'C'$ ähnlich zu dem Dreieck $\triangle ABC$ und es gelten daher die Anforderungen an die Winkel.

Lösung der Aufgabe

Die Anforderungen an P erfüllt nur der Mittelsenkrechtenschnittpunkt.

4 Lösung zu Aufgabe 4

Berechnung der Anzahl der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen

Seien $a_i[n]$ die n-stelligen Zahlen (10^{n-1} bis $10^n - 1$) mit genau i verschiedenen Ziffern. Dann gilt $a_1[1] = 9$ und $a_i[1] = 0$ für $2 \leq i \leq 10$, da alle neun einstelligen Zahlen ungleich 0 nur genau eine Ziffer enthalten. Es gilt sogar $a_1[n] = 9$, da eine Zahl mit nur einer verschiedenen Ziffer diese nicht 0 sein darf und man jeder der restlichen neun Ziffern eine n-stellige Zahl nur aus dieser Ziffer zuordnen kann. Zudem gilt die Rekursionsvorschrift $a_i[n+1] = i \cdot a_i[n] + (11 - i) \cdot a_{i-1}[n]$ $(i, n > 1)$, da eine i-ziffrige $(n+1)$-stellige Zahl entweder aus einer i-ziffrigen n-stelligen Zahl ensteht, indem eine der i in der Zahl enthaltenen Ziffern ans Ende gehängt wird, also ingesamt $i \cdot a_i[n]$ oder aus einer $(i-1)$-ziffrigen n-stelligen Zahl ensteht, indem eine der $10 - (i-1) = 11 - i$ in der Zahl nicht enthaltenen Ziffern ans Ende gehängt wird, also insgesamt $(11 - i) \cdot a_{i-1}[n]$.

Die explizite Formel für die Rekursionsgleichung

Diese Rekursion wird durch diese Formel gelöst:

$$b_i[n] = \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^n$$

Beweis der Gültigkeit der expliziten Formel

Überprüfung der „Randwerte“: $b_1[n]$ ist immer 9:

$$\begin{aligned} b_1[n] &= \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{1} \cdot \sum_{j=1}^{1} \binom{1}{j} (-1)^{1-j} j^n \\ &= \frac{9}{10} \cdot 10 \cdot (1 \cdot 1 \cdot 1^n) = 9 \end{aligned}$$

$b_i[1]$ $(2 \leq i \leq 10)$ ist 0:
Es gilt mit $n > 1$:

$$\begin{aligned} f(x) = (x-1)^n &= \sum_{u=0}^{n} \binom{n}{u} (-1)^{n-u} \cdot x^u \\ f'(x) = n \cdot (x-1)^{n-1} &= \sum_{u=1}^{n} \binom{n}{u} (-1)^{n-u} \cdot u \cdot x^{u-1} \\ f'(1) = 0 &= \sum_{u=1}^{n} \binom{n}{u} (-1)^{n-u} \cdot u \end{aligned}$$

Mit $n = i$ und $u = j$ ergibt sich:

$$b_i[1] = \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^n = k \cdot \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j = 0$$

Vorüberlegungen zum Beweis der Erfüllung der Rekursionsgleichung:

V1: $$i \cdot \binom{10}{i} = i \cdot \frac{10!}{(10-i)! \cdot i!} = (11-i) \cdot \frac{10!}{(11-i)! \cdot (i-1)!} = (11-i) \cdot \binom{10}{i-1}$$

V2: $$\binom{i}{j} - \binom{i-1}{j} = \frac{i!}{(i-j)! \cdot j!} - \frac{(i-1)!}{(i-j-1)! \cdot j!} = \frac{i!}{(i-j)! \cdot j!} - \frac{i-j}{i} \frac{i!}{(i-j)! \cdot j!}$$
$$= \left(\frac{i}{i} - \frac{i-j}{i}\right) \cdot \frac{i!}{(i-j)! \cdot j!} = \frac{j}{i} \cdot \binom{i}{j}$$

Beweis der Erfüllung der Rekursionsgleichung der expliziten Formel: Nun soll $b_i[n+1] = i \cdot b_i[n] + (11-i) \cdot b_{i-1}[n]$ für $2 \leq i \leq 10$ und $1 < n$ gelten.

$$\begin{aligned}
& i \cdot b_i[n] + (11-i) \cdot b_{i-1}[n] \\
&= \frac{9}{10} \cdot \left(i \cdot \binom{10}{i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^n + (11-i) \cdot \binom{10}{i-1} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^{i-j-1} j^n \right) \\
&\overset{\text{V1}}{=} \frac{9}{10} \cdot \left(i \cdot \binom{10}{i} \cdot \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^n + \mathbf{i} \cdot \binom{\mathbf{10}}{\mathbf{i}} \cdot \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^{i-j-1} j^n \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot i \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} (-1)^{i-j} j^n + \sum_{j=1}^{i-1} \binom{i-1}{j} (-1)^{i-j-1} j^n \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot i \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\binom{i}{i} (-1)^{i-i} i^n + \sum_{j=1}^{i-1} \left((-1)^{i-j} \binom{i}{j} + (-1)^{i-j-1} \binom{i-1}{j} \right) \cdot j^n \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot i \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\binom{i}{i} (-1)^{i-i} i^n + \sum_{j=1}^{i-1} (\mathbf{-1})^{\mathbf{i-j}} \left(\binom{\mathbf{i}}{\mathbf{j}} - \binom{\mathbf{i-1}}{\mathbf{j}} \right) \cdot j^n \right) \\
&\overset{\text{V2}}{=} \frac{9}{10} \cdot i \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\binom{i}{i} (-1)^{i-i} i^n + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \frac{\mathbf{j}}{\mathbf{i}} \cdot \binom{\mathbf{i}}{\mathbf{j}} \cdot j^n \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{i} \cdot \left(\binom{i}{i} (-1)^{i-i} i^{n+1} + \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i-j} \cdot \binom{i}{j} \cdot j^{n+1} \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{i} \cdot \sum_{j=1}^{i} (-1)^{i-j} \cdot \binom{i}{j} \cdot j^{n+1} = b_i[n+1]
\end{aligned}$$

□

Da also die Randwerte ($n = 1$ und $i = 1$) der expliziten Formel $b_i[n]$ und der rekursiven Formel $a_i[n]$ übereinstimmen und die explizite Formel die Rekursionsgleichung erfüllt, gilt $a_i[n] = b_i[n]$. Da die rekursive Formel die Anzahl der i-ziffrigen n-stelligen Zahlen liefert, ergibt die explizite Formel dies auch.

Explizite Formel der Anzahl der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen

Die Anzahl $A(n)$ der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen ist nun die Anzahl der n-stelligen Zahlen minus der Anzahl der n-stelligen Zahlen mit 10 verschiedenen Ziffern:

$$\begin{aligned}
A(n) &= 9 \cdot 10^{n-1} - a_{10}[n] = 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{10} \cdot \sum_{j=1}^{10} \binom{10}{j} (-1)^{10-j} j^n \\
&= 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{9}{10} \cdot \sum_{j=1}^{10} \binom{10}{j} (-1)^j j^n \\
&= 9 \cdot 10^{n-1} - \frac{9}{10} \cdot \binom{10}{10} \cdot 10^n - \frac{9}{10} \cdot \sum_{j=1}^{9} \binom{10}{j} (-1)^j j^n \\
&= \frac{9}{10} \cdot \sum_{j=1}^{9} \binom{10}{j} (-1)^{j+1} j^n \\
&= \frac{9}{10} \cdot \left(\binom{10}{5} 5^n + \sum_{j=1}^{4} \binom{10}{j} \left((-1)^{j+1} j^n + (-1)^{(10-j)+1} (10-j)^n \right) \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \left(\binom{10}{5} 5^n + \sum_{j=1}^{4} \binom{10}{j} \left((-1)^{j+1} (10-j)^n + (-1)^{j+1} j^n \right) \right) \\
&= \frac{9}{10} \cdot \left(\binom{10}{5} 5^n + \binom{10}{1} (9^n + 1^n) - \binom{10}{2} (8^n + 2^n) + \binom{10}{3} (7^n + 3^n) - \binom{10}{4} (6^n + 4^n) \right)
\end{aligned}$$

Es gilt für die Binomialkoeffizienten:

$$\begin{aligned}
\binom{10}{1} &= \frac{10!}{9! \cdot 1!} = 10 \\
\binom{10}{2} &= \frac{10!}{8! \cdot 2!} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45 \\
\binom{10}{3} &= \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{2 \cdot 3} = 10 \cdot 3 \cdot 4 = 120 \\
\binom{10}{4} &= \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 10 \cdot 3 \cdot 7 = 210 \\
\binom{10}{5} &= \frac{10!}{5! \cdot 5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 2 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 7 = 4 \cdot 63 = 252
\end{aligned}$$

Daher gilt:

$$A(n) = \frac{9}{10} \cdot (10 \cdot (9^n + 1^n) - 45 \cdot (8^n + 2^n) + 120 \cdot (7^n + 3^n) - 210 \cdot (6^n + 4^n) + 252 \cdot 5^n)$$

Bestimmung einer Oberschranke der Summe

Sei $\mathcal{Z}$ die Menge aller ziffernreduzierter Zahlen und M eine endliche Teilmenge davon. Dann gilt wegen $M \subset \mathcal{Z}$:

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{1}{n}$$

Es reicht also die zweite Summe nach oben abzuschätzen.

Sei $\mathcal{Z}_a^n$ die Menge der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen mit Anfangsziffer a ($1 \leq a \leq 9$). Wenn man bei den Zahlen aus $\mathcal{Z}_a^n$ a durch b und b durch a ersetzt, konstruiert man aus einer Zahl aus $\mathcal{Z}_a^n$ eine Zahl aus $\mathcal{Z}_b^n$. Diese Konstruktion ist eindeutig, d.h. aus einer Zahl in $\mathcal{Z}_a^n$ kann nur eine aus $\mathcal{Z}_b^n$ hervorgehen. Da die Konstruktion reversibel ist, hat jede Zahl aus $\mathcal{Z}_b^n$ höchstens eine Zahl, aus der sie konstruiert werden kann. Daher hat $\mathcal{Z}_b^n$ mindestens genau so viele Elemente wie $\mathcal{Z}_a^n$. Da man dies auch umgekehrt tun kann, folgt daraus, dass die Mengen $\mathcal{Z}_a^n$ und $\mathcal{Z}_b^n$ gleich viele Elemente haben. Es

gilt daher, dass die Anzahl der n-stelligen ziffernreduzierten Zahlen mit Anfangsziffer a gerade $A(n)/9$ ist. Desweiteren sind alle diese Zahlen größer oder gleich $a \cdot 10^{n-1}$ und damit ist ihr Kehrwert kleiner als der dieser Zahl.
Daraus folgt:

$$\sum_{n\in\mathcal{Z}} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{9} \frac{1}{a\cdot 10^{n-1}} \cdot \frac{A(n)}{9} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A(n)}{9\cdot 10^{n-1}}\sum_{a=1}^{9}\frac{1}{a}\right)$$

Man kann $\sum_{a=1}^{9}\frac{1}{a}$ so abschätzen:

$$\sum_{a=1}^{9}\frac{1}{a} \leq 1,00+0,50+0,34+0,25+0,20+0,17+0,15+0,13+0,12 = 2,86$$

Daher:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{A(n)}{9\cdot 10^{n-1}}\sum_{a=1}^{9}\frac{1}{a}\right) \leq 2,86\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A(n)}{9\cdot 10^{n-1}}\\
&= 2,86\sum_{n=1}^{\infty}\frac{10\cdot(9^n+1^n)-45\cdot(8^n+2^n)+120\cdot(7^n+3^n)-210\cdot(6^n+4^n)+252\cdot 5^n}{10^n}\\
&= 2,86\cdot\sum_{n=1}^{\infty} S_1(n)-S_2(n)+S_3(n)-S_4(n)+S_5(n)\\
&= 2,86\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}S_1(n)-\sum_{n=1}^{\infty}S_2(n)+\sum_{n=1}^{\infty}S_3(n)-\sum_{n=1}^{\infty}S_4(n)+\sum_{n=1}^{\infty}S_5(n)\right)
\end{aligned}$$

da alle $\sum_{i=1}^{\infty} S_i$ konvergieren. Mit:

$$\begin{aligned}
S_1(n) &= 10\left(\left(\frac{9}{10}\right)^n+\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}S_1(n) &= 10\left(\frac{1}{1-\frac{9}{10}}+\frac{1}{1-\frac{1}{10}}-2\right) = 10\left(10-\frac{10}{9}-2\right) = 10\frac{90+10-18}{9} = \frac{820}{9} < 92\\
S_2(n) &= 45\left(\left(\frac{8}{10}\right)^n+\left(\frac{2}{10}\right)^n\right)\\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}S_2(n) &= 45\left(\frac{1}{1-\frac{8}{10}}+\frac{1}{1-\frac{2}{10}}-2\right) = 45\left(5+\frac{5}{4}-2\right) = \frac{45\cdot 17}{4} = \frac{(4\cdot 11+1)\cdot 17}{4} =\\
&= 187+17/4 = 191+1/4 > 191\\
S_3(n) &= 120\left(\left(\frac{7}{10}\right)^n+\left(\frac{3}{10}\right)^n\right)\\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}S_3(n) &= 120\left(\frac{1}{1-\frac{7}{10}}+\frac{1}{1-\frac{3}{10}}-2\right) = 120\left(\frac{10}{3}+\frac{10}{7}-2\right) = 120\cdot\frac{70+30-42}{21}\\
&= \frac{40\cdot 58}{7} = \frac{(6\cdot 7-2)\cdot 58}{7} = 348-\frac{116}{7} = 348-\frac{16\cdot 7+4}{7} = 332-\frac{4}{7} < 332\\
S_4(n) &= 210\left(\left(\frac{6}{10}\right)^n+\left(\frac{4}{10}\right)^n\right)\\
\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}S_4(n) &= 210\left(\frac{1}{1-\frac{6}{10}}+\frac{1}{1-\frac{4}{10}}-2\right) = 210\left(\frac{5}{2}+\frac{5}{3}-2\right) = 35(15+10-12) = 455\\
S_5(n) &= 252\left(\frac{5}{10}\right)^n \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}S_5(n) = 252\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{5}{10}}-1\right) = 252(2-1) = 252
\end{aligned}$$

Die Subtraktion der 2 bzw. 1 bei S_5 entstehen dadurch, dass die geometrische Reihe bei der Formel $\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q}$ mit dem Startindize 0 beginnt und nicht mit 1, wie oben. Daher muss $q^0 = 1$ zwei- bzw. einmal noch subtrahiert werden.

Daher gilt:

$$2,86 \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} S_1(n) - \sum_{n=1}^{\infty} S_2(n) + \sum_{n=1}^{\infty} S_3(n) - \sum_{n=1}^{\infty} S_4(n) + \sum_{n=1}^{\infty} S_5(n) \right)$$
$$\leq 2,86 \cdot (92 - 191 + 332 - 455 + 252) = 2,86 \cdot 30 = 85,8 < 86$$

Damit gilt auch:

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} \leq \sum_{n \in \mathcal{Z}} \frac{1}{n} < 86 < 180$$

Daher ist die Summe der Kehrwerte einer beliebigen endlichen Menge ziffernreduzierter Zahlen kleiner als 180.